

3. Bergwandeling

- a. Gretige strategie: Start in (0, 0). Kijk in elke hectare naar het hoogteverschil met de hectare in oostelijke richting en dat met de hectare in zuidelijke richting. Kies de richting met het kleinste hoogteverschil.

0	3	5	6	5	4
1	2	2	2	7	3
1	8	7	6	6	2
3	9	7	4	5	3
7	8	7	5	6	2
4	5	8	4	5	0

Gretige route:

- zuid, zuid, zuid, zuid, zuid, oost, oost, zuid, oost, oost, oost (ZZZZOOZOOO).
- (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5).

Het hoogteverschil van deze route is: $1 + 0 + 2 + 4 + 1 + 1 + 1 + 4 + 1 + 5 = 20$.

- b. $M[n-1][n-1] = 0$: Als je in (n-1,n-1) bent hoeft je niet meer verder te lopen (kan ook niet); het (minimale) hoogteverschil met (n-1,n-1) is dan uiteraard 0.

$M[n-1][j] = M[n-1][j+1] + \text{abs}(H[n-1][j+1] - H[n-1][j])$: Als je in (n-1,j) bent kun je nog maar 1 kant op, namelijk alleen oostwaards (naar rechts). Het minimale hoogteverschil dat je kunt halen is dan het minimale hoogteverschil vanaf je oostelijke buur (n-1,j+1) (dus $M[n-1][j+1]$) plus het (absolute) hoogteverschil dat je overbrugt door van (n-1,j) naar (n-1,j+1) te lopen.

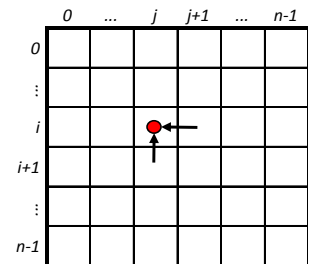
$M[i][n-1] = M[i+1][n-1] + \text{abs}(H[i+1][n-1] - H[i][n-1])$: Vergelijkbaar met bovenstaande, maar voor zuidwaarts.

$M[i][j] = \min(M[i+1][j] + \text{abs}(H[i+1][j] - H[i][j]), M[i][j+1] + \text{abs}(H[i][j+1] - H[i][j]))$: Dit is het algemene geval. Vanuit (i,j) kun je alleen naar de hectare direct ten oosten (rechts) of naar de hectare direct ten zuiden (onder), dus naar (i,j+1) of naar (i+1,j). Van daaruit is het minimale hoogteverschil van een wandeling naar (n-1,n-1) gelijk aan $M[i][j+1]$ resp. $M[i+1][j]$. Dus, als je vanuit (i,j) via de rechterbuur naar (n-1,n-1) wil, is het minimale hoogteverschil dat je kan bereiken gelijk aan $M[i][j+1] + \text{abs}(H[i][j] - H[i][j+1])$ tussen (i,j) en zijn rechter buur (i,j+1). Iets soortgelijks voor een wandeling die via de benedenbuur (i+1,j) naar (n-1,n-1) gaat. Het minimale hoogteverschil om van (i,j) naar (n-1,n-1) te komen is dan natuurlijk het minimum van deze twee mogelijkheden.

- c. $M[i][j]$ wordt bepaald uit $M[i+1][j]$ en $M[i][j+1]$. Deze moeten dus bepaald worden voor $M[i][j]$. Vullen van M moet daarom van rechtsonder naar links boven gevuld worden.

Zowel de kolommen als de rijen worden van n-2 terug naar 0 doorlopen. Dus:

- Eerst $M[n-1][n-1]$
- Dan de laatste rij ($i = n-1$) en de laatste kolom ($j = n-1$) voor i respectievelijk j van n-1 dalend naar 0. Laatste rij eerst of laatste kolom eerst maakt niet uit.
- Tenslotte in een dubbele loop met i én j van n-1 dalend naar 0. Per kolom of per rij, maakt niet uit.



$M[n-1][n-1] = 0$;

for (int i = n - 2; i >= 0; i--)

$M[i][n-1] = M[i+1][n-1] + \text{abs}(H[i+1][n-1] - H[i][n-1])$;

for (int j = n - 2; j >= 0; j--)

$M[n-1][j] = M[n-1][j+1] + \text{abs}(H[n-1][j+1] - H[n-1][j])$;

for (int i = n - 2; i >= 0; i--)

 for (int j = n - 2; j >= 0; j--)

$M[i][j] = \min(M[i+1][j] + \text{abs}(H[i+1][j] - H[i][j]), M[i][j+1] + \text{abs}(H[i][j+1] - H[i][j]))$;

return $M[0][0]$;

12	11	9	8	7	6
11	10	10	10	7	5
15	8	7	6	6	4
15	11	9	6	5	3
11	10	9	7	6	2
14	13	10	6	5	0

- d. Het minimale hoogteverschil van de route is $M[0][0] = 12$. De bijbehorende route is:

- zuid, oost, oost, oost, zuid, oost, zuid, oost, zuid, zuid (ZOOOZOZOZZ).
- (0, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 5).

Start in (0, 0) en herhaal tot de oostelijke of zuidelijke rand bereikt is ($i = n-1$ of $j = n-1$):

- De waarde in $M[i][j]$ is berekend volgens de recurrente betrekking en is (van wege de min-functie) gelijk aan óf $M[i+1][j] + \text{abs}(H[i+1][j] - H[i][j])$, de route via (i+1, j) naar het zuiden, óf $M[i][j+1] + \text{abs}(H[i][j+1] - H[i][j])$ de route via (i, j+1) naar het oosten, of beide.
 - als $M[i][j] - \text{abs}(H[i+1][j] - H[i][j]) = M[i+1][j]$: ga naar het zuiden (i++)
 - anders: ga naar het oosten (j++) (dan is nl. $M[i][j] - \text{abs}(H[i][j+1] - H[i][j]) = M[i][j+1]$)

Wanneer $i = n - 1$ of $j = n - 1$ is er nog maar één richting mogelijk en hoeft er niet meer gepuzzeld te worden.

N.B. Er is een versnelling mogelijk door op te merken, dat de route in M nooit van een hokje met een lagere waarde naar een hokje met een hogere waarde kan gaan.