

TENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 2

donderdag 13 januari 2005, 14.00 - 17.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven waarbij steeds de waardering tussen [en] gegeven is. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Opgave 1 [20 pt]

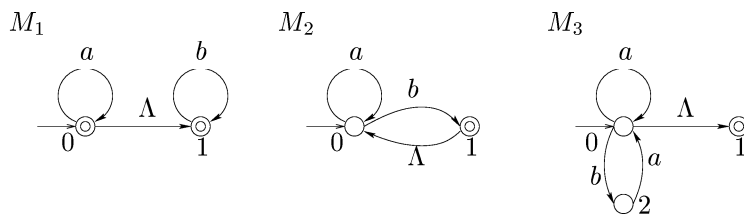
Laat $B = \{1\}\{0,1\}^*$. Elk woord $w \in B$ wordt opgevat als de binaire representatie van een positief natuurlijk getal. Voor $w \in B$ is $\text{bin}(w)$ het getal gerepresenteerd door w .

- Geef een reguliere expressie en een eindige automaat voor de taal $L = \{w \in B \mid \text{bin}(w) \text{ is geen macht van } 2\}$.
- Geef een eindige automaat voor de taal $K = \{w \in B \mid \text{bin}(w) \text{ is deelbaar door } 4\}$.
- Bekijk nu de equivalentierelatie I_K bepaald door de taal K uit het vorige onderdeel, die aangeeft welke paren woorden niet te onderscheiden zijn met betrekking tot K :
 xI_Ky geldt als voor alle $z \in \{0,1\}^*$, $xz \in L$ dan en slechts dan als $yz \in L$.
Laat zien dat alle woorden $w \in B$ zodat $\text{bin}(w)$ oneven is, ononderscheidbaar zijn m.b.t. K .
Geldt uI_Kv ook altijd als $\text{bin}(u)$ en $\text{bin}(v)$ allebei even zijn?
Waarom (niet)?
- Gebruik de eindige automaten gegeven voor L en K om met behulp van de productconstructie een eindige automaat te construeren voor $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{bin}(w) \text{ is deelbaar door } 4 \text{ en geen macht van } 2\}$.

NB: geef de gevraagde automaten d.m.v. hun transitiediagrammen; let erop dat ze deterministisch en volledig gedefinieerd moeten zijn.

Opgave 2 [18 pt]

Gegeven zijn drie niet-deterministische automaten M_1 , M_2 en M_3 met Λ -transities.



- Geef voor elk paar verschillende automaten M_i , M_j ($i \neq j$) een woord x zodat $x \in L(M_i) - L(M_j)$.
Let op: er zijn dus 6 situaties $L(M_i) - L(M_j)$ te bekijken!
- Geef voor M_3 een NFA zonder Λ -transities die dezelfde taal accepteert door de volgende tabel in te vullen.

q	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$	$\delta(q, \Lambda)$	$\Lambda(\{q\})$	$\delta^*(q, a)$	$\delta^*(q, b)$
0						
1						
2						

Teken de resulterende NFA ook en geef daarbij begin- en eindtoestanden duidelijk aan.

Opgave 3 [22 pt]

Voor een willekeurige taal L over een alfabet Σ definiëren we twee talen:

$$L_{\text{prefs}} = \{xy \mid x \in L \text{ en } y \in \Sigma^*\}$$

bestaande uit alle woorden over Σ die een woord uit L als prefix hebben, en

$$L_{1/2} = \{xy \mid x \in L \text{ en } y \in \Sigma^* \text{ en } |y| = |x|\}$$

bestaande uit alle woorden over Σ waarvan de eerste helft een woord uit L is.

- Veronderstel dat L een taal is die herkend wordt door een eindige automaat. Laat nu zien dat L_{prefs} ook regulier is.
- Formuleer het pomplemma voor reguliere talen.
- Gebruik het pomplemma om te bewijzen dat de taal $K = \{0^i v \mid v \in \{0, 1\}^* \text{ en } |v| = i \geq 0\}$ niet regulier is.
- Is $L_{1/2}$ altijd een reguliere taal als L dat is? Waarom (niet)?

Opgave 4 [20 pt]

We bekijken de context-vrije grammatica G gegeven door de volgende producties:

$$S \rightarrow aS \mid aSb \mid AS \mid \Lambda \quad A \rightarrow aAa \mid b$$

- Laat zien dat de volgende woorden afgeleid kunnen worden in G :
 $abb \quad bab \quad bba$
- Laat zien dat voor alle $k \geq 0$ geldt dat $S \Rightarrow^* a^k S$ en $S \Rightarrow^* a^k b S$.
- Laat zien dat $L(G) = \{a, b\}^*$ of geef een woord $w \in \{a, b\}^* - L(G)$.
- Bewijs dat G dubbelzinnig is.
Is $L(G)$ inherent dubbelzinnig? Waarom (niet)?

Opgave 5 [20 pt]

$\text{pal} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^r\}$ bestaat uit de palindromen over $\{a, b\}$.

- Geef een context-vrije grammatica die pal genereert.
- $L_{a,b} = \{xaybz \mid x, y, z \in \{a, b\}^* \text{ en } |x| = |z|\}$.
Geef een context-vrije grammatica voor $L_{a,b}$.
- Laat zien dat het complement van pal ook context-vrij is
- Bekijk de volgende beweringen:
 - als L_1 en L_2 context-vrije talen zijn, dan ook $L_1 \cup L_2$;
 - als L een context-vrije taal is, dan ook zijn complement.

Geef voor elke bewering aan of hij waar is of niet.

Beargumenteer het antwoord met een constructie of tegenvoorbeeld.