TENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 2
maandag 1 augustus 2005, 14.00 - 17.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven waarbij steeds de waardering tussen [en] gegeven is. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Opgave 1 [16 pt]

(a) Geef een reguliere expressie voor de taal L_1 over het alfabet $\{a, b, c\}$ bestaande uit alle woorden die precies één a en één b bevatten.

(b) Geef een (deterministische) eindige automaat die L_1 herkent.

(c) $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) = 2\}$ bestaat uit alle woorden over $\{a, b, c\}$ die precies twee a's en twee b's bevatten.

Geef een FA M zodat $L(M) = L_2$.

(d) Voor elke $k \geq 1$ definiëren we

$L_k = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) = k\}$ als de taal bestaande uit alle woorden over $\{a, b, c\}$ die precies k a's en k b's bevatten.

Wat is het kleinste aantal toestanden dat een FA die L_k herkent, kan hebben? Waarom?

NB: geef de gevraagde automaten d.m.v. hun transitiediagrammen;
let erop dat ze deterministisch en volledig gedefinieerd moeten zijn.

Opgave 2 [16 pt]
Hieronder is de transitietabel gegeven van de NFA M met invoeralfabet $\{a, b\}$, toestanden 1, 2, 3 en 4, begintoestand 1 en eindtoestanden 2 en 4.

q	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
1	$\{1, 2\}$	$\{2\}$
2	$\{3\}$	$\{2\}$
3	$\{3\}$	$\{3, 4\}$
4	$\emptyset$	$\emptyset$

(a) Teken het transitiediagram van M.

(b) Bereken $\delta^*(1, a)$, $\delta^*(1, aa)$ en $\delta^*(1, aab)$.

(c) Construeer met behulp van de subsetconstructie een FA M' die dezelfde taal accepteert als M. Geef duidelijk aan wat de begin- en eindtoestanden van M' zijn.

Opgave 3 [25 pt]
Gegeven is $L = \{0,1\}^*\{10\}\{0,1\}$, dus elk woord in L eindigt op 100 of 101.

I_L is de equivalentierelatie die aangeeft wanneer twee woorden ononderscheidbaar zijn wat betreft L:
xI_Ly geldt als voor alle $z \in \{0,1\}^*$, $xz \in L$ dan en slechts dan als $yz \in L$.

(a) Laat zien dat Λ, 1, 10, 100 en 101 worden onderscheiden door I_L.

(b) Laat zien dat voor elk woord $x \in \{0,1\}^*$ geldt dat het equivalent is met een van de woorden Λ, 1, 10, 100 of 101.

(c) Construeer de minimale eindige automaat die L accepteert gebaseerd op de equivalentieklassen $[\Lambda]$, $[1]$, $[10]$, $[100]$, $[101]$ van I_L.

Opgave 4 [20 pt]
We bekijken de context-vrije grammatica G gegeven door de volgende producties:
$S \to 0 \mid 0S \mid 1SS \mid S1S \mid SS1$.

(a) Ga na of de volgende strings kunnen worden afgeleid uit S:
$S1010 \quad 0S110 \quad 110S1$

(b) Laat zien dat G dubbelzinnig is.

(c) Bewijs met inductie naar k, de lengte van de afleiding, dat voor alle $k \geq 0$ geldt: als $S \Rightarrow^k w$, dan is $n_0(w) + n_S(w) > n_1(w)$.

(d) Geef $L(G)$, zonder bewijs.

(e) Geef een CFG voor de taal $\{w \in \{0,1\}^* \mid n_0(w) \neq n_1(w)\}$.

Opgave 5 [23 pt]

(a) Formuleer het pomplemma voor context-vrije talen.

(b) Bekijk de volgende twee talen:

$L_{\texttt{en}} = \{a^ib^jc^k \mid i \leq j \text{ en } i \leq k\}$

$L_{\texttt{of}} = \{a^ib^jc^k \mid i \leq j \text{ of } i \leq k\}$.

Laat zien dat
één van deze twee talen context-vrij is (door een grammatica te geven)
en de ander niet (door het pomplemma te gebruiken).

---

einde tentamen