Spelen met spellen

dr. Walter Kosters

Universiteit Leiden, Informatica

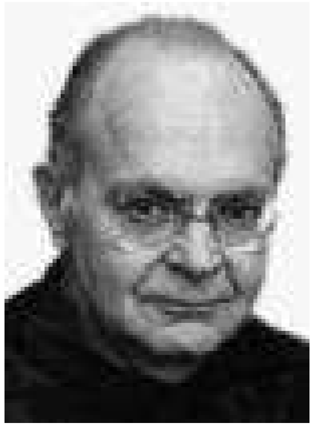
zaterdag 25 maart 2006

`http://www.liacs.nl/home/kosters/`

Je kunt op allerlei manieren spellen spelen.

In de Kunstmatige intelligentie (AI, Artificial Intelligence) probeer je computerprogramma's te schrijven die bijvoorbeeld goed kunnen schaken.

Je kunt spellen ook analyseren: "bij vier-op-een-rij kan de beginspeler altijd winnen".

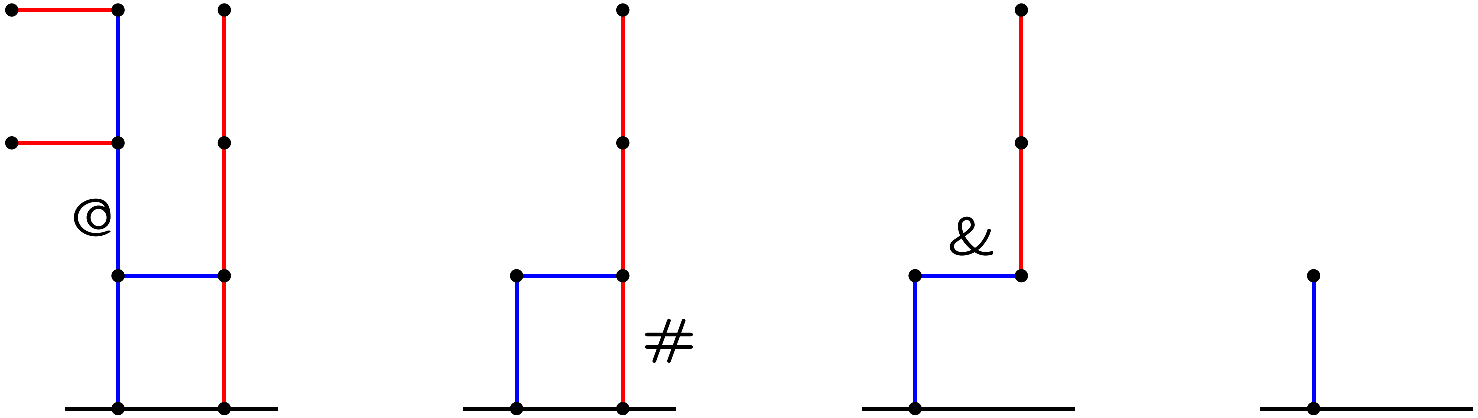


Donald E.(Ervin) Knuth
1938, US
NP; KMP
TEX
change-ringing; 3:16
The Art of Computer Programming

John H.(Horton) Conway
1937, UK $\rightarrow$ US
Co_1, Co_2, Co_3
Doomsday algoritme
game of Life; Angel problem
Winning Ways for your Mathematical Plays

Surreal numbers

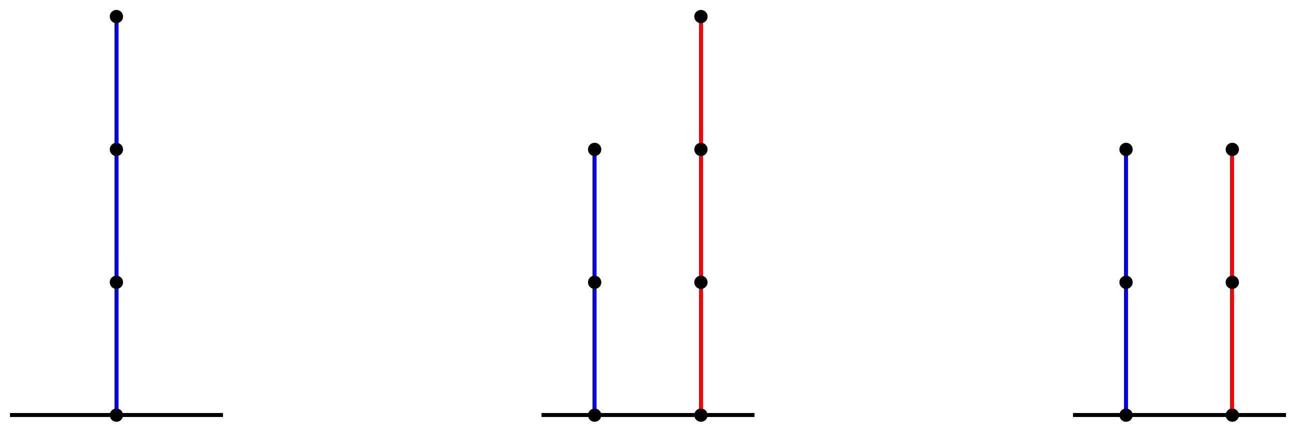
Bij het spel Hackenbush verwijderen Left en Right om de beurt respectievelijk een bLauw of een Rood streepje, waarna alle streepjes die niet meer met de grond verbonden zijn ook worden verwijderd. *Wie niet kan, heeft verloren!*



Left kiest @, Right kiest # (dom), Left kiest & en wint

Overigens: hier kan Right altijd winnen, wie er ook begint!

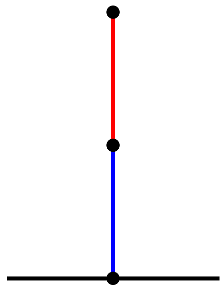
Wat is bij Hackenbush de waarde van een positie?



waarde 3 | waarde $2 - 3 = -1$ | waarde $2 - 2 = 0$

Als de waarde positief (> 0) is, *kan* Left altijd winnen (wie er ook begint; in het linker voorbeeld met voorsprong 3), als de waarde negatief (< 0) is *kan* Right altijd winnen, en als de waarde 0 is verliest de beginspeler.

Maar wat is de waarde van deze positie?



Als Left begint, wint hij meteen; als Right begint, kan Left nog een keer, en wint hij ook. Dus Left wint altijd. De waarde is daarom > 0.

Vraag: is de waarde gelijk aan 1?

Als de waarde links 1 zou zijn, zou de waarde van de rechter positie $1 + (-1) = 0$ moeten zijn, en zou de beginspeler hier moeten verliezen. Is dat zo?

Nee: het is zo dat als Left begint, Left verliest, en als Right begint Right ook kan winnen. Dus Right wint altijd (= kan altijd winnen), en daarom is de rechter positie < 0, en de linker tussen 0 en 1.

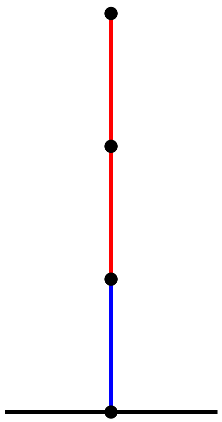
We noteren de waarde van de linker positie met $\{\ 0 \mid 1\ \}$.

We merken op dat de rechter positie wél waarde 0 heeft: de beginspeler verliest. En dus geldt:

$$\{\ 0 \mid 1\ \} + \{\ 0 \mid 1\ \} + (-1) = 0,$$

en blijkbaar $\{\ 0 \mid 1\ \} = 1/2$.

We noteren de waarde van een positie waarin Left kan spelen naar (waardes van) posities uit de verzameling L en Right kan spelen naar (waardes van) posities uit de verzameling R met $\{ L \mid R \}$. Een voorbeeld:



De waarde is hier $\{ 0 \mid \frac{1}{2}, 1 \} = \frac{1}{4}$.

De waarde blijkt altijd het “eenvoudigste” getal dat tussen linker en rechter verzameling in zit.

Op deze manier definiëren we onze surreële getallen: het zijn paren van verzamelingen eerder gedefinieerde surreële getallen.

We beginnen met $0 = \{\,\emptyset \mid \emptyset\,\} = \{\,\text{NIKS} \mid \text{NIKS}\,\} = \{\mid\}$: het spel waarbij de beginspeler geen enkele mogelijkheid heeft, en dus verliest.

En dan $1 = \{\,0 \mid\,\}$ en $-1 = \{\,\mid 0\,\}$.
En $42 = \{\,41 \mid\,\}$.
En $\frac{3}{8} = \{\,\frac{1}{4} \mid \frac{1}{2}\,\}$.
En $\pi = \{\,3, 3\frac{1}{8}, 3\frac{9}{64}, \ldots \mid 4, 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 3\frac{3}{16}, 3\frac{5}{32}, \ldots\,\}$.

De reëele getallen (de verzameling $\mathbf{R}$) zitten in de surreële getallen (de verzameling $\mathbf{S}$).

De zogeheten Dali-functie $\delta : \mathbf{R} \to \mathbf{S}$ verzorgt die "inbedding": $\delta(1) = \{ 0 \mid \} = 1$.

Maar er is meer ...

We definieren bijvoorbeeld:

$$\varepsilon = \{\ 0 \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ \},$$

een "ongelooflijk klein positief getal", en

$$\omega = \{\ 0, 1, 2, 3, \ldots\ \mid\ \} = \{\ \mathbf{Z} \mid \emptyset\ \},$$

een "verschrikkelijk groot getal, een soort ∞".

Dan blijkt te gelden:

$$\varepsilon \cdot \omega = 1$$

— mits je vermenigvuldiging goed gedefinieerd is . . .

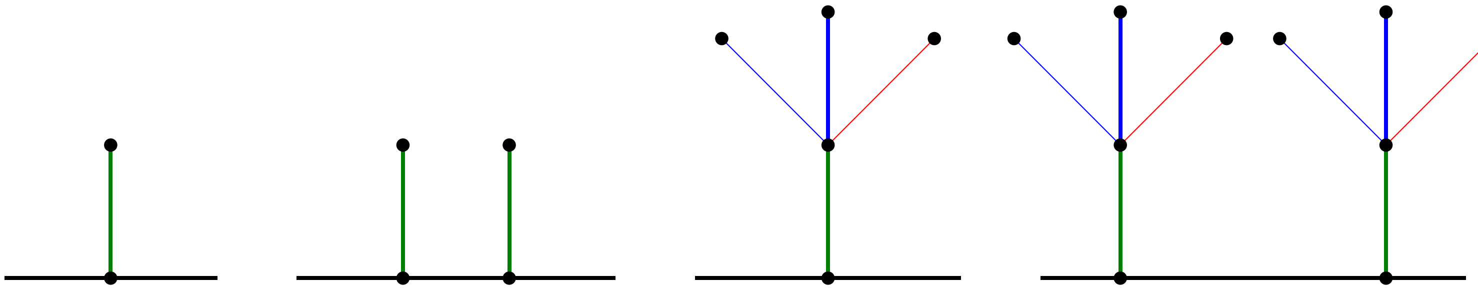
En dan heb je ook $\omega + 1$, $\sqrt{\omega}$, ω^{ω}, $\varepsilon/2$, enzovoorts!

We zijn wat slordig geweest. Wat betekent bijvoorbeeld $\{ 0 \mid 0 \}$? Dat is een spel waar de beginspeler altijd wint, door een 0-spel achter te laten!

Uiteindelijk eis je voor surreële getallen dat geen element van de rechterkant $\leq$ een element van de linkerkant (en mag $\{ 0 \mid 0 \}$ niet). Maar dan moet je wel precies definiëren wat $\leq$ betekent ...

In de spellenwereld bestaat $\{ 0 \mid 0 \}$ dus wel. Maar ... dit "getal" is niet kleiner dan 0, niet gelijk aan 0, en ook niet groter dan 0.

Bij Hutspot-Hackenbush zijn er ook nog groene streepjes, die door *beide* spelers mogen worden weggepakt.



De meest linker positie heeft waarde $* = \{\, 0 \mid 0 \,\}$, want de beginspeler kan winnen door het groene streepje te pakken. De tweede van links is $* + * = 0$ (beginner verliest).

De tweede van rechts is weer gewonnen voor de beginspeler. De meest rechter positie is gewonnen voor Left (wie er ook begint), en is dus > 0.

Hoe tel je op? Zo:

$$a + b = \{\, A_L + b, a + B_L \mid A_R + b, a + B_R \,\}$$

als $a = \{\, A_L \mid A_R \,\}$ en $b = \{\, B_L \mid B_R \,\}$.
Hier definiëren we $u + Z = \{\, u + z \mid z \in Z \,\}$; $u + \emptyset = \emptyset$.

Hoe kom je aan die formule? Dat zie je als je met spellen gaat spelen, die je dan optelt = samenvoegt = parallel naast elkaar speelt: op 2 borden dammen, waarbij je iedere keer een zet op één bord (naar keuze) doet.

Ga maar eens na dat

$$1 + \frac{1}{2} = \{\, 1 \mid 2 \,\} = \frac{3}{2}\,.$$

We hebben heel veel details overgeslagen. Waarom is bijvoorbeeld $\{\ 0 \mid 2\ \}$ gelijk aan 1? En waarom is $\{\ 0 \mid 7\ \}$ ook gelijk aan 1, en niet aan $3\frac{1}{2}$? En wat is gelijkheid? En is de optelling goed gedefinieerd (ja)? En geldt $\delta(x+y) = \delta(x)+\delta(y)$ (ja)?

Voor meer informatie, zie

`http://www.tondering.dk/claus/surreal.html`

J.H. Conway, On Numbers and Games, 2001

E.R. Berlekamp, J.H. Conway and R.K. Guy,
Winning Ways for your Mathematical Plays, 2001

Maxi en Mini spelen het volgende eenvoudige spel: Maxi wijst eerst een horizontale rij aan, en daarna kiest Mini een verticale kolom.

3	12	8
2	4	6
14	5	2

Bijvoorbeeld: Maxi kiest rij 3, daarna kiest Mini kolom 2; dat levert einduitslag 5.

Maxi wil graag een zo groot mogelijk getal, Mini juist een zo klein mogelijk getal.

Hoe spelen we dit spel zo goed mogelijk?

Als Maxi rij 1 kiest, kiest Mini kolom 1 (levert 3); als Maxi rij 2 kiest, kiest Mini kolom 1 (levert 2); als Maxi rij 3 kiest, kiest Mini kolom 3 (levert 2). Dus kiest Maxi rij 1!

3	12	8
2	**?**	**?**
14	5	2

Nu merken we op dat de analyse hetzelfde verloopt als we niet eens weten wat onder de twee vraagtekens zit. Het α-β-algoritme onthoudt als het ware de beste en slechtste mogelijkheden, en kijkt niet verder als dat toch nergens meer toe kan leiden.

Ieder schaakprogramma gebruikt deze methode.

Ook aan een spel als Tetris kleven allerlei vragen:

- Hoe speel je het zo goed mogelijk? (AI)
- Hoe moeilijk is het? (complexiteit)
- Wat kan er allemaal gebeuren?

Zo is bijvoorbeeld bewezen dat sommige Tetris-problemen NP-volledig zijn, dat je bijna alle configuraties kunt bereiken, maar dat niet alle problemen "beslisbaar" zijn, zie:

`http://www.liacs.nl/home/kosters/tetris/`