

KC&Sn

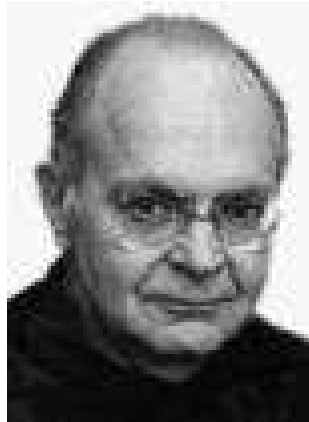
Knuth, Conway en Surreal numbers

dr. Walter Kusters

Universiteit Leiden, Informatica

woensdag 5 april 2006

<http://www.liacs.nl/home/kusters/>



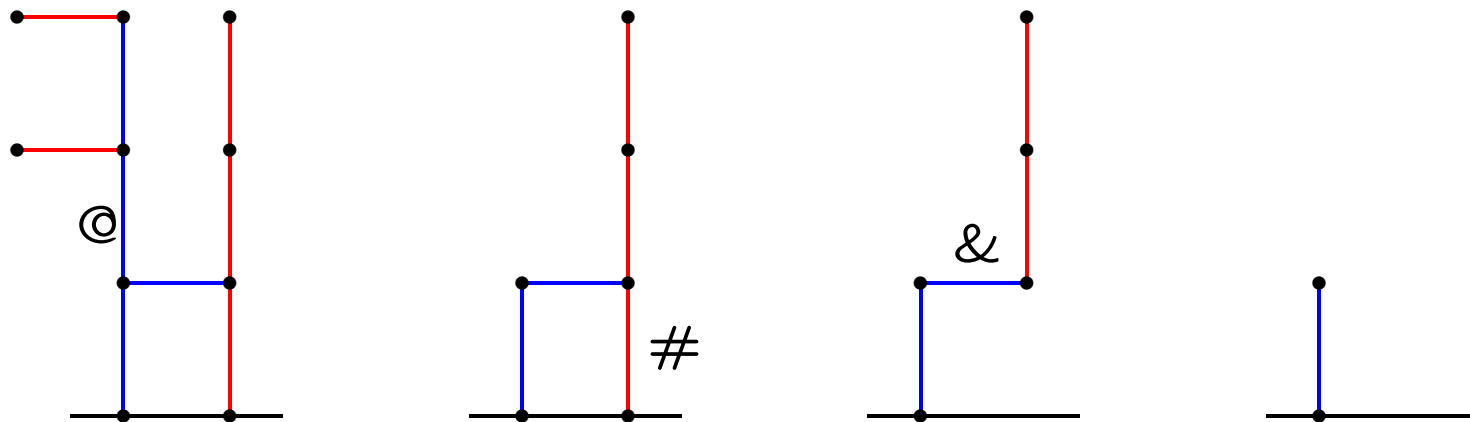
Donald E.(Ervin) Knuth
1938, US
NP; KMP
T_EX
change-ringing; 3:16
The Art of Computer
Programming



John H.(Horton) Conway
1937, UK → US
 C_0 , C_0 , C_0
Doomsday algoritme
game of Life; Angel problem
Winning Ways for your
Mathematical Plays

Surreal numbers

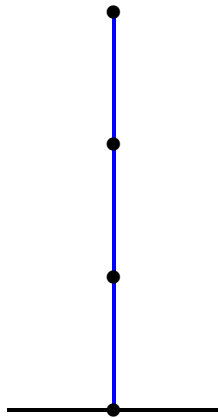
Bij het spel **Hackenbush** verwijderen **Left** en **Right** om de beurt respectievelijk een **bLauw** of een **Rood** streepje, waarna alle streepjes die niet meer met de grond verbonden zijn ook worden verwijderd. *Wie niet kan, heeft verloren!*



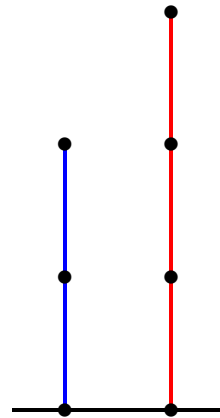
Left kiest @, **Right** kiest # (dom), **Left** kiest & en wint

Overigens: hier kan **Right** altijd winnen, wie er ook begint!

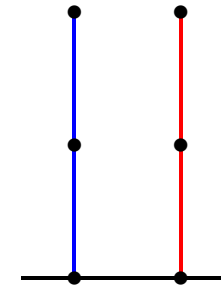
Wat is bij Hackenbush de **waarde van een positie**?



waarde 3



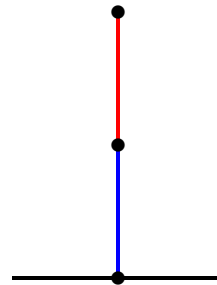
waarde $2 - 3 = -1$



waarde $2 - 2 = 0$

Als de waarde positief (> 0) is, kan **Left** altijd winnen (wie er ook begint; in het linker voorbeeld met voorsprong 3), als de waarde negatief (< 0) is kan **Right** altijd winnen, en als de waarde 0 is verliest de beginspeler.

Maar wat is de waarde van deze positie?



Als **Left** begint, wint hij meteen; als **Right** begint, kan **Left** nog een keer, en wint hij ook. Dus **Left** wint altijd. De waarde is daarom > 0 .

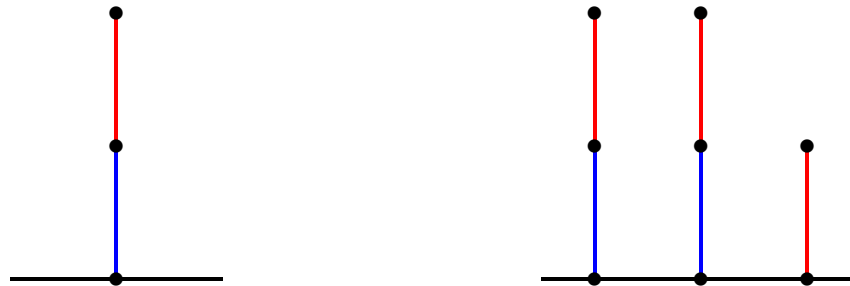
Vraag: is de waarde gelijk aan 1?

Als de waarde links 1 zou zijn, zou de waarde van de rechter positie $1 + (-1) = 0$ moeten zijn, en zou de beginspeler hier moeten verliezen. Is dat zo?



Nee: het is zo dat als **Left** begint, **Left** verliest, en als **Right** begint **Right** ook kan winnen. Dus **Right** wint altijd (= kan altijd winnen), en daarom is de rechter positie < 0 , en de linker tussen 0 en 1.

We noteren de waarde van de linker positie met $\{ 0 \mid 1 \}$.

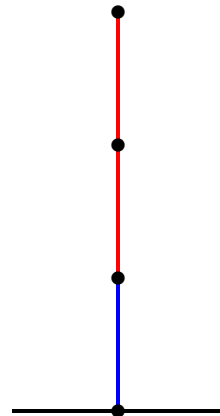


We merken op dat de rechter positie wél waarde 0 heeft: de beginspeler verliest. En dus geldt:

$$\{ 0 \mid 1 \} + \{ 0 \mid 1 \} + (-1) = 0,$$

en blijkbaar $\{ 0 \mid 1 \} = 1/2$.

We noteren de waarde van een positie waarin **Left** kan spelen naar (waardes van) posities uit de verzameling L en **Right** kan spelen naar (waardes van) posities uit de verzameling R met $\{ L \mid R \}$. Een voorbeeld:



De waarde is hier $\{ 0 \mid \frac{1}{2}, 1 \} = \frac{1}{4}$.

De waarde blijkt altijd het “eenvoudigste” getal dat tussen linker en rechter verzameling in zit.

Op deze manier definiëren we onze **surreële getallen**: het zijn paren van verzamelingen eerder gedefinieerde surreële getallen.

We beginnen met $0 = \{ \emptyset \mid \emptyset \} = \{ \text{NIKS} \mid \text{NIKS} \} = \{ \mid \}$: het spel waarbij de beginspeler geen enkele mogelijkheid heeft, en dus verliest.

En dan $1 = \{ 0 \mid \}$ en $-1 = \{ \mid 0 \}$.

En $42 = \{ 41 \mid \}$.

En $\frac{3}{8} = \{ \frac{1}{4} \mid \frac{1}{2} \}$.

En $\pi = \{ 3, 3\frac{1}{8}, 3\frac{9}{64}, \dots \mid 4, 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 3\frac{3}{16}, 3\frac{5}{32}, \dots \}$.

De reële getallen (de verzameling \mathbf{R}) zitten in de surreële getallen (de verzameling \mathbf{S}).



De zogeheten **Dali-functie** $\delta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ verzorgt die “inbedding”: $\delta(1) = \{ 0 \mid \} = 1$.

Maar er is meer ...

We definiëren bijvoorbeeld:

$$\varepsilon = \{ 0 \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \},$$

een “ongelooflijk klein positief getal”, en

$$\omega = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \mid \} = \{ \mathbf{Z} \mid \emptyset \},$$

een “verschrikkelijk groot getal, een soort ∞ ”.

Dan blijkt te gelden:

$$\varepsilon \cdot \omega = 1$$

— mits je vermenigvuldiging goed gedefinieerd is . . .

En dan heb je ook $\omega + 1$, $\sqrt{\omega}$, ω^ω , $\varepsilon/2$, enzovoorts!

We zijn wat slordig geweest. Wat betekent bijvoorbeeld $\{ 0 \mid 0 \}$? Dat is een spel waar de beginspeler altijd wint, door een 0-spel achter te laten!

Uiteindelijk eis je voor surreële getallen dat geen element van de rechterkant \leq een element van de linkerkant (en mag $\{ 0 \mid 0 \}$ niet). Maar dan moet je wel precies definiëren wat \leq betekent . . .

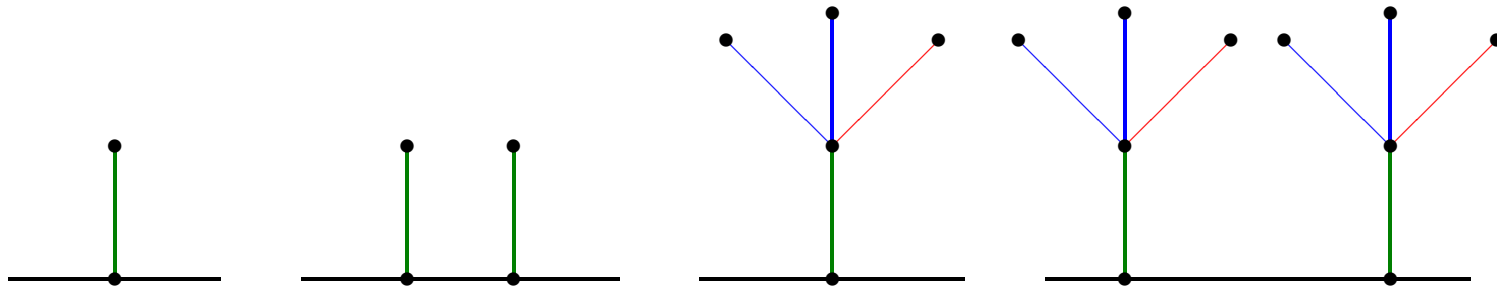
In de spellenwereld bestaat $\{ 0 \mid 0 \}$ dus wel. Maar . . . dit “getal” is niet kleiner dan 0, niet gelijk aan 0, en ook niet groter dan 0.

De **surreële getallen** (= **surreal numbers**) worden als volgt gedefinieerd:

Een surreëel getal is een geordend paar verzamelingen van eerder gedefinieerde surreële getallen, de “linker verzameling” en de “rechter verzameling”. Geen element van de rechter verzameling mag kleiner dan of gelijk aan een element van de linker verzameling zijn (“**well-formed**”).

Een surreëel getal x is kleiner dan of gelijk aan (\leq) een surreëel getal y dan en slechts dan als y kleiner dan of gelijk is aan geen enkel element van de linker verzameling van x en geen enkel element van y 's rechter verzameling kleiner dan of gelijk aan x is.

Bij **Hotspot-Hackenbush** zijn er ook nog **groene** streepjes, die door *beide* spelers mogen worden weggepakt.



De meest linker positie heeft waarde $* = \{ 0 \mid 0 \}$, want de beginspeler kan winnen door het **groene** streepje te pakken. De tweede van links is $* + * = 0$ (beginner verliest).

De tweede van rechts is weer gewonnen voor de beginspeler. De meest rechter positie is gewonnen voor **Left** (wie er ook begint), en is dus > 0 .

Hoe tel je op? Zo:

$$a + b = \{ A_L + b, a + B_L \mid A_R + b, a + B_R \}$$

als $a = \{ A_L \mid A_R \}$ en $b = \{ B_L \mid B_R \}$.

Hier definiëren we $u + Z = \{ u + z \mid z \in Z \}$; $u + \emptyset = \emptyset$.

Hoe kom je aan die formule? Dat zie je als je met spellen gaat spelen, die je dan optelt = samenvoegt = parallel naast elkaar speelt: op 2 borden dammen, waarbij je iedere keer een zet op één bord (naar keuze) doet.

Ga maar eens na dat

$$1 + \frac{1}{2} = \{ 1 \mid 2 \} = \frac{3}{2}.$$

We hebben heel veel details overgeslagen. Waarom is bijvoorbeeld $\{ 0 \mid 2 \}$ gelijk aan 1? En waarom is $\{ 0 \mid 7 \}$ ook gelijk aan 1, en niet aan $3\frac{1}{2}$? En wat is gelijkheid? En is de optelling goed gedefinieerd (ja)? En geldt $\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y)$ (ja)?

Voor meer informatie, zie

<http://www.tondering.dk/claus/surreal.html>

J.H. Conway, On Numbers and Games, 2001

E.R. Berlekamp, J.H. Conway and R.K. Guy,
Winning Ways for your Mathematical Plays, 2001