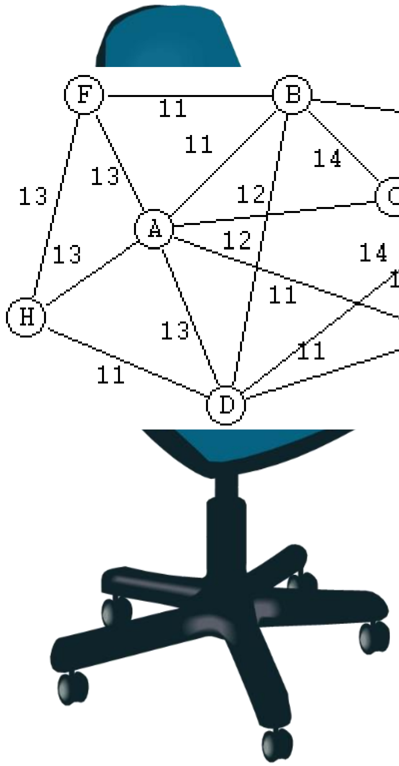


GRAFEN

DATASTRUCTUREN

Dr. D.P. Huijsmans

College 8 23 oktober 2013

Universiteit Leiden LIACS

ONDERWERPEN

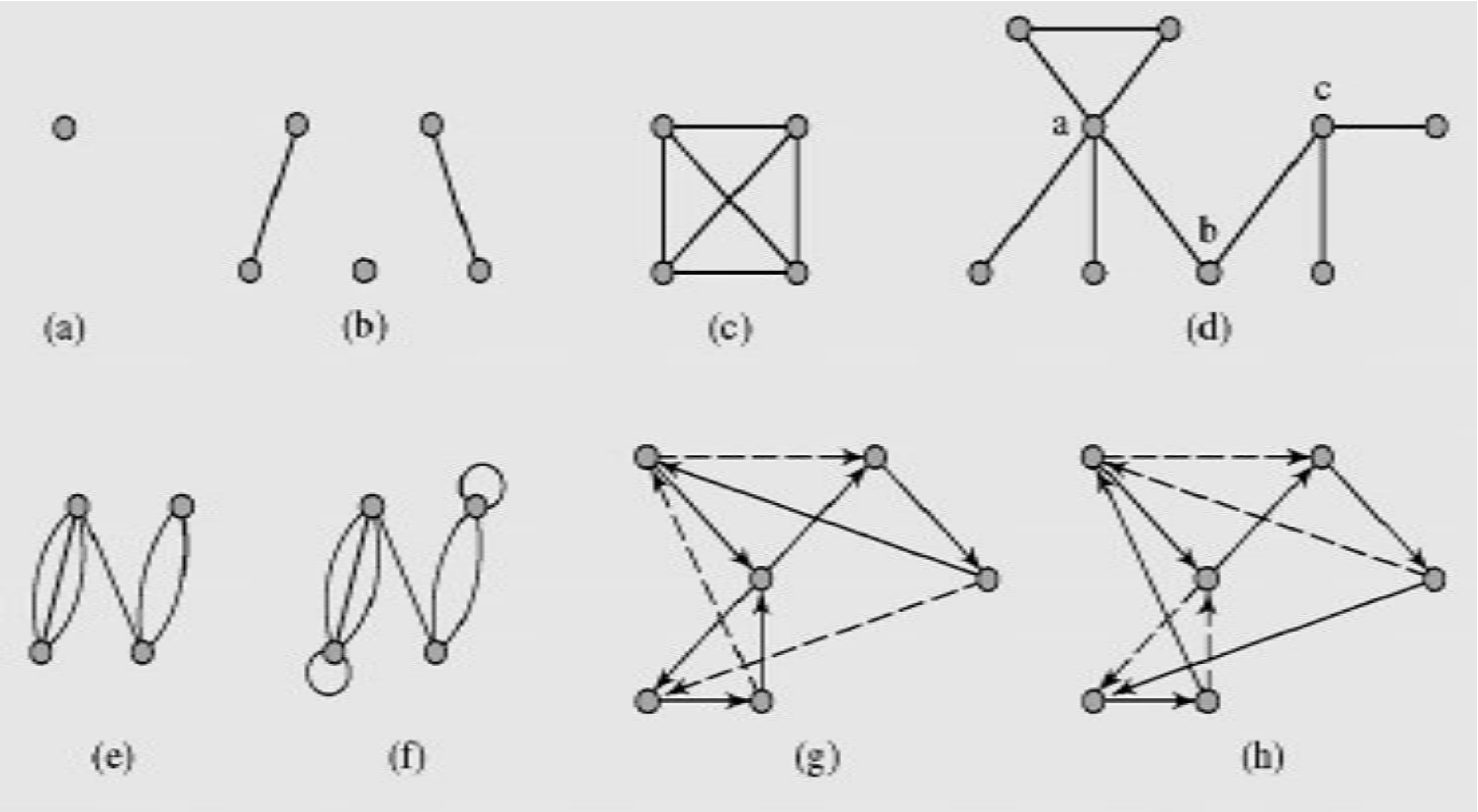
- Meest algemene datastructuur om onderlinge relaties van N elementen aan te geven, inclusief relaties tot zichzelf (attributen)

- Gerichte en ongerichte verbindingen
- Datastructuren voor grafen
- Paden, kortste pad
- Cycles
- Spanning tree
- Topologische sortering

Grafen
een meest algemene datastructuur

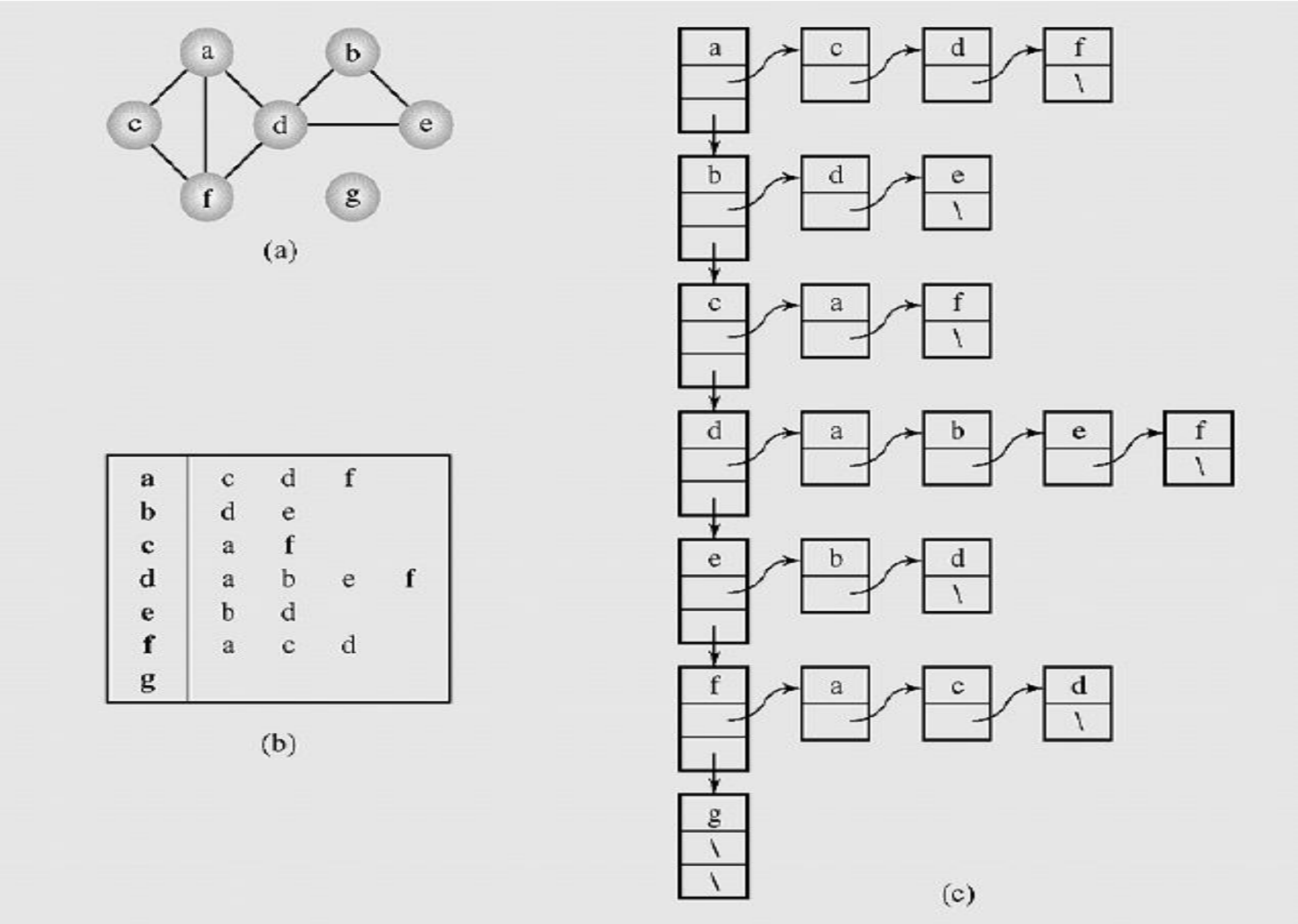
- Om relaties tussen N objecten in zijn meest algemene vorm te representeren is een graaf de aangewezen datastructuur
- Een graaf bestaat uit N knopen (waarin waardes of records met informatie is opgeborgen) en plaats voor alle mogelijke relaties tussen die knopen
- Relaties heten ook/kunnen staan voor:
  - verbindingen, edges , overgangen, zijdes, takken, frequenties, gewichten, attributen etc.
- Verbindingen tussen knopen kunnen ongericht of gericht zijn:
  - digraaf in het geval van directed graph

Voorbeelden van grafen



Examples of graphs: (a–d) simple graphs; (c) a complete graph K4;
(e) a multigraph; (f) a pseudograph; (g) a circuit in a digraph; (h) a cycle in the digraph

Representaties van grafen



a) Visueel b) adjacency matrix c) linked lists representation

Representaties van grafen-2

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	0	1	1	0	1	0
b	0	0	0	1	1	0	0
c	1	0	0	0	0	1	0
d	1	1	0	0	1	1	0
e	0	1	0	1	0	0	0
f	1	0	1	1	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0

(d)

	ac	ad	af	bd	be	cf	de	df
a	1	1	1	0	0	0	0	0
b	0	0	0	1	1	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	0	0
d	0	1	0	1	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1	0	1	0
f	0	0	1	0	0	1	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0	0

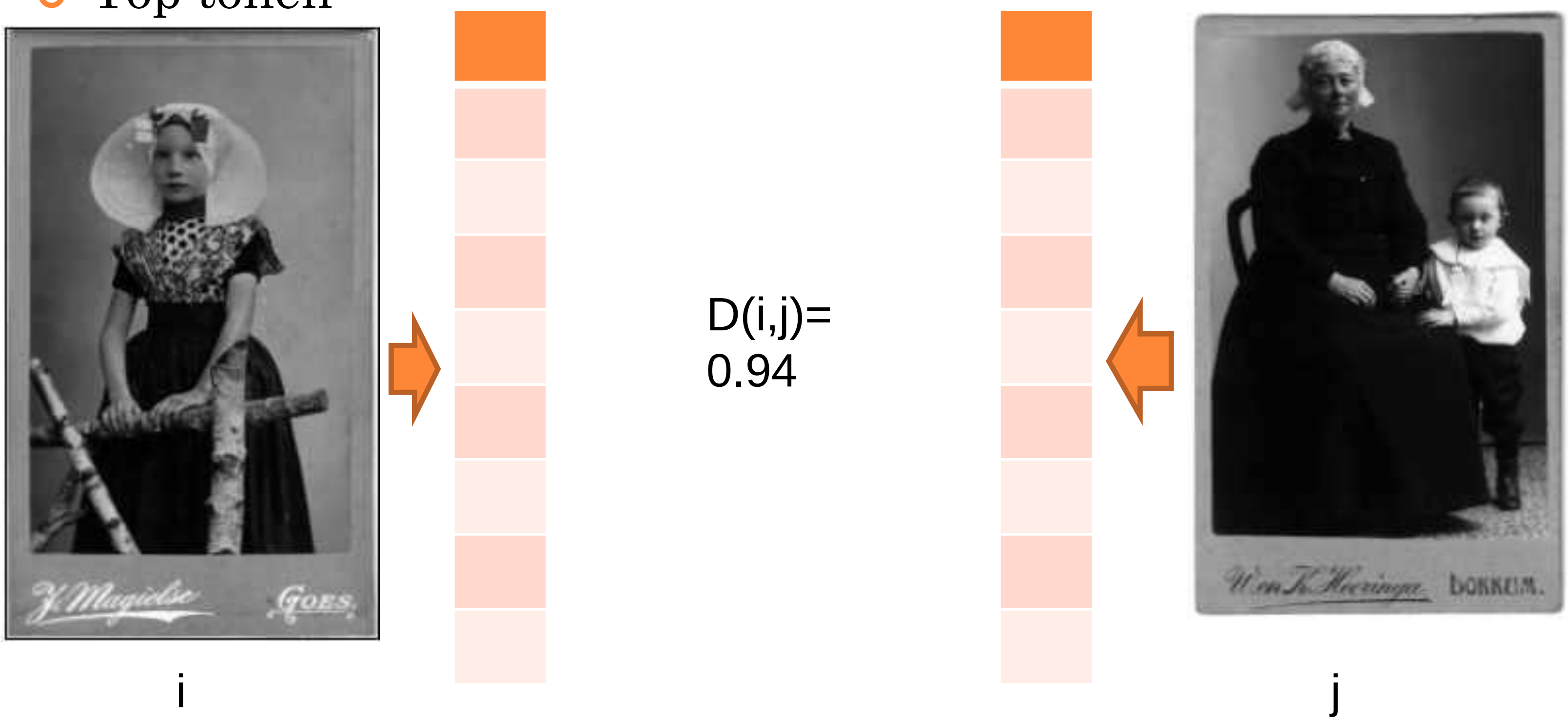
(e)

d) adjacency/connectivity matrix

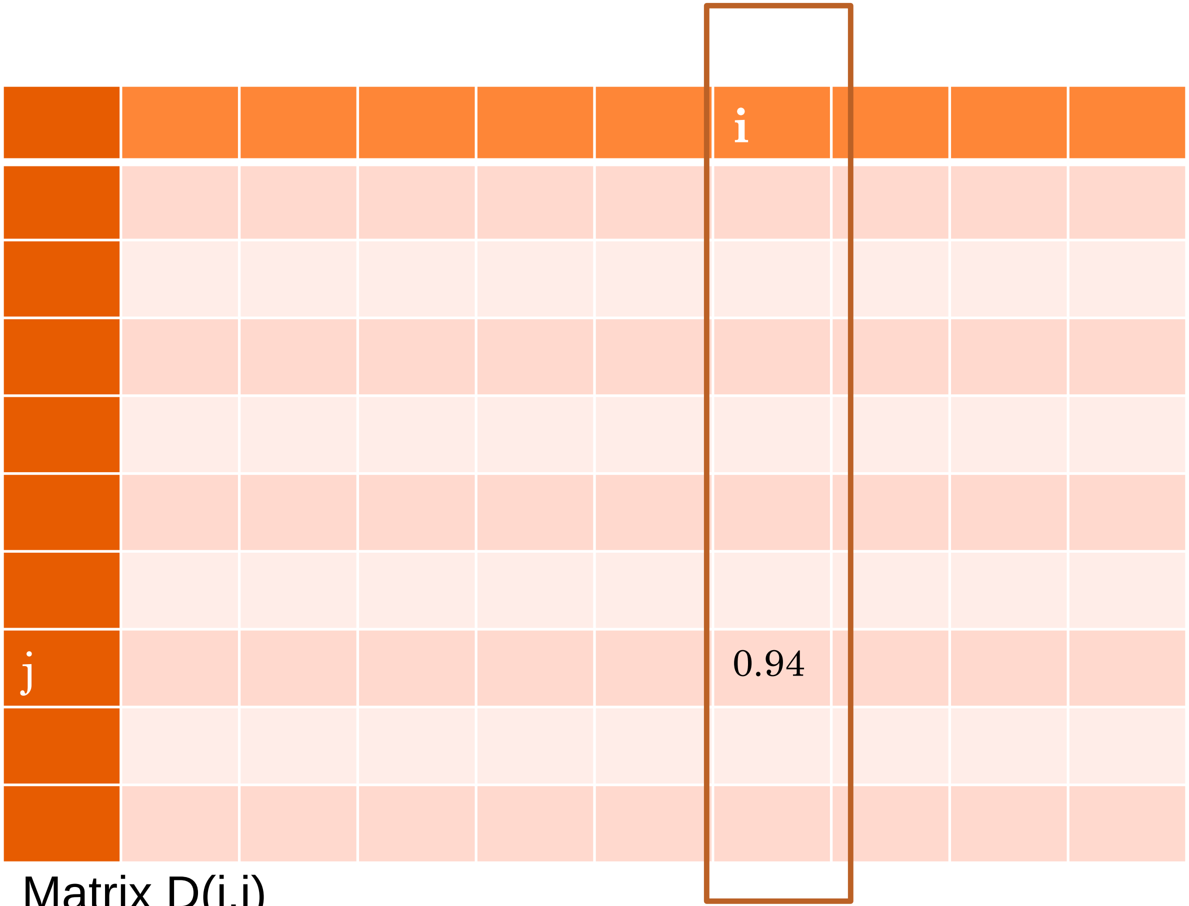
e) incidence matrix

Voorbeeld graaf gebruik bij zoeken naar soortgelijke beelden

- Opzet LCPD (Leiden 19th-Century Portrait Database)
- Op grond van kenmerkvector elk beeld in de database met elk ander beeld vergelijken -> afstandsmaat D(i,j)
- Resultaten per zoekbeeld i sorteren -> rank list R(i,j)
- Top tonen



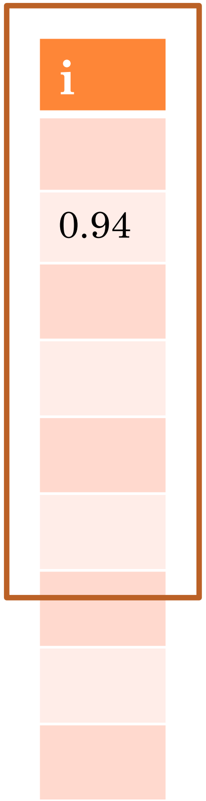
VERVOLG VOORBEELD LCPD
VISUELE GELIJKHEID



Matrix D(i,j)

~ 21.000 beelden

Kolom onder i sorteren



Getoonde top van ranking list

Ranking list voor i

DEMO'S LCPD EN RKD

Content-based Image Retrieval in LCPD: the Leiden 19th-Century Portrait Database

Leiden Imaging and Multimedia group, Computer Science department Leiden University
Study and Documentation Centre for Photography (Printroom) of Leiden University,
Photohistorian Steven Wachlin (Biographical Information Photographers)
The Netherlands

Image search tools:

- **Studio:**

  Carte de Visite portraits made by the same photographic studio

- **Album:**

  original family album context is virtually restored

- **Browsing:**

  when the other entries fail

- **Portrait Query:**

  starting at random using relevance feedback

- **Logo Query:**

ADT_Graaf

- Omdat de voorstellingen van grafen zo verschillen is het moeilijk de specificatie en functionaliteit van een Abstract Data Type voor een Graaf los te zien van de uiteindelijke implementatie

- Bekijk (op losse bladen):
- ADT_AdjGraaf specificatie
- ADT_LLGraaf specificatie

Beperkingen op grafen voor matrixvoorstelling

- In het algemeen kunnen grafen:
  - Meerdere verbindingen hebben tussen 2 knopen (multigraaf)
  - Lege verbindingen hebben
  - Verbindingen naar zichzelf hebben (lussen, pseudograaf
- Binnen datastructuren zullen we ons beperken tot grafen die:
  - Maximaal 1 gerichte verbinding hebben tussen 2 knopen (geen parallelle gerichte verbindingen)
  - Geen lege verbindingen hebben (alleen verbindingen tussen knopen)
  - Wel/niet lussen hebben (verbinding met zichzelf): met lussen noemen we het een pseudograaf

Matrix representatie van een graaf

- De NxN connectivity matrix waarin voor elke combinatie van N objecten met elkaar zowel de
- N_i -> N_j en de N_j -> N_i met i,j ε [1..N] verbinding gerepresenteerd kan worden geeft het beste totaal overzicht van de onderlinge relaties

Ni\Nj	1	2	3	4
1	1	1	1	0
2	0	0	0	1
3	0	0	0	0
4	0	1	0	0

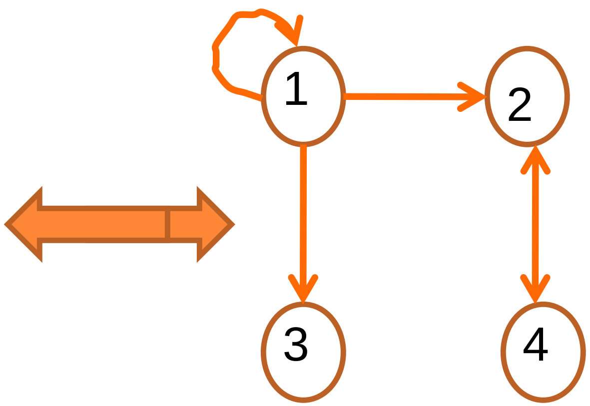
1= verbinding N_i->N_j
0= geen verbinding

In principe is een bit per mogelijke verbinding voldoende

Digraaf representatie van een matrix

- Inzichtelijker voor een bepaalde configuratie is vaak de representatie in de vorm van knopen en bestaande gerichte verbindingen
- Maar de matrix geeft je een beter totaal overzicht

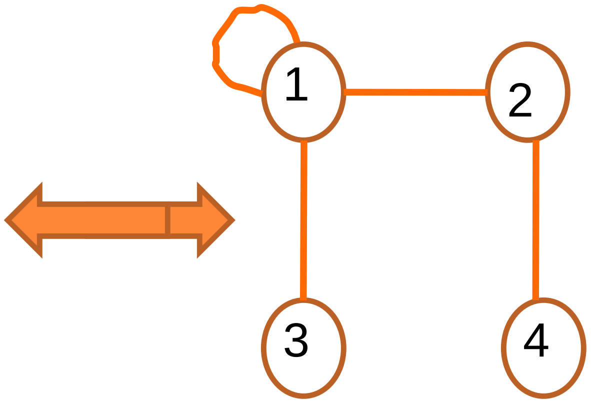
Ni\Nj	1	2	3	4
1	1	1	1	0
2	0	0	0	1
3	0	0	0	0
4	0	1	0	0



(Ongerichte) graaf representatie van een matrix

- Bij ongerichte verbindingen geldt de bestaande relatie wederzijds Ni <-> Nj
- Er kan volstaan worden met een
  - boven of onder driehoeksmatrix vorm inclusief diagonaal voor lussen

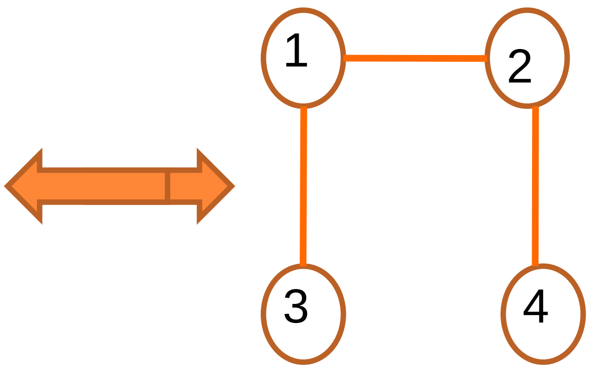
Ni\Nj	1	2	3	4
1	1	1	1	0
2		0	0	1
3			0	0
4				0



(Ongerichte) graaf
representatie van een matrix zonder lussen

- Bij ongerichte verbindingen geldt de bestaande relatie wederzijds Ni <-> Nj
- En kan volstaan worden met een
  - boven of onder driehoeksmatrix vorm zonder diagonaal

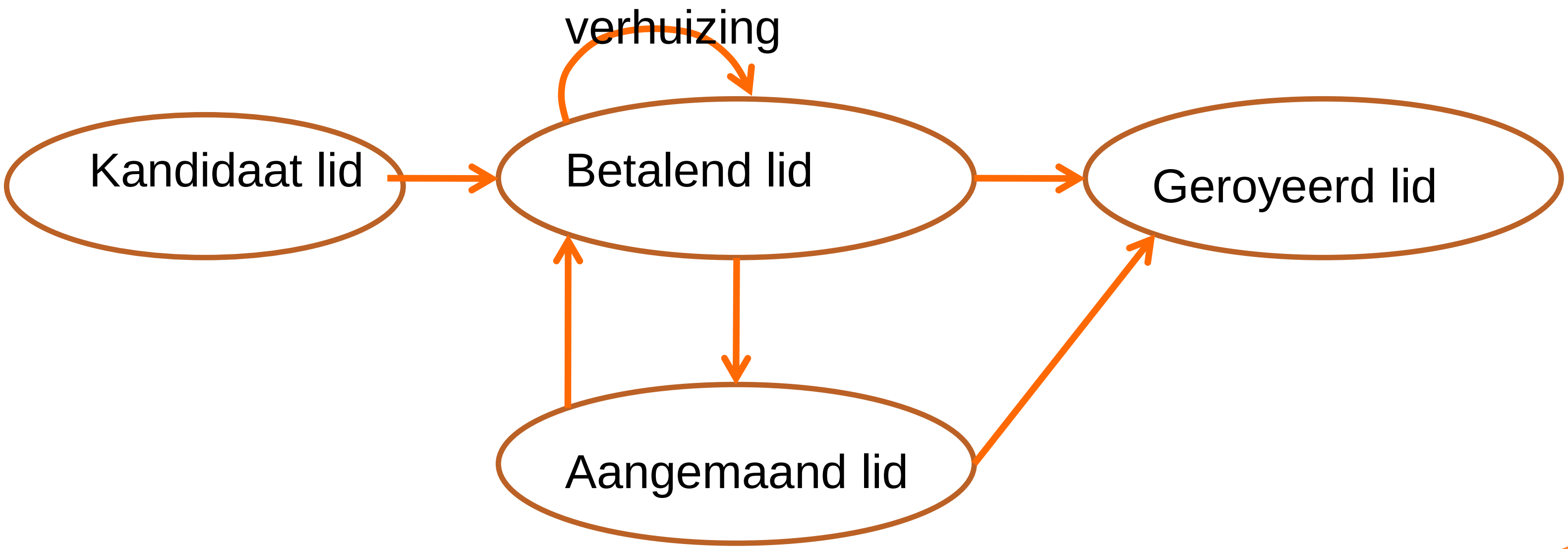
Ni\Nj	1	2	3	4
1		1	1	0
2			0	1
3				0
4				



Wel/niet lussen waar nuttig voor?

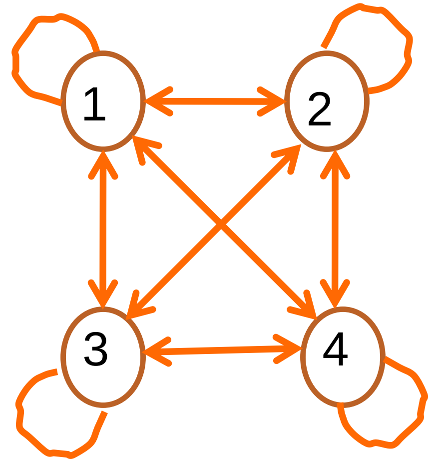
- Lussen staan voor relaties die een knoop met zichzelf kan hebben:
- \- attribuut (b.v. edge met leeftijd informatie)
- \- onveranderde toestand na bewerking:
  - Grafen worden veel gebruikt om mogelijke toestanden van een systeem te beschrijven inclusief alle mogelijke toestandsovergangen
  - B.v. contributietoestand van persoon in ledenadministratie;
  - Blijft betalend lid na verhuizing

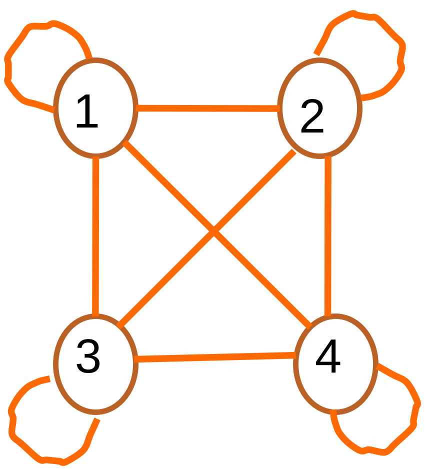
LIDMAATSCHAPSGRAAF



Volledige Graaf

Ni\Nj	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1





Ni\Nj	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2		1	1	1
3			1	1
4				1

LINKED-LIST
SPECIALE VERSIE VAN EEN DIGRAAF

Ni\Nj	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		1							
2			1						
3				1					
4					1				
5						1			
6							1		
7								1	
8									1
9									

Lege entries zijn 0

Er is 1 gericht pad van 1->2->3->4->5->6->7->8->9

Linked-list 2
speciale versie van een digraaf

Ni\Nj	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									1
2							1		
3									
4								1	
5		1							
6					1				
7				1					
8			1						
9						1			

Lege entries zijn 0

Er is 1 gericht pad van 1->9->6->5->2->7->4->8->3

VOORBEELD BINAIRE ZOEK BOOM

a	b	e	g	j	k	m	n	p	q	s	t	v	w	z
					k									
		e								s				
	b			j				p				v		
a			g				n		q		t			z
						m							w	

Van alle mogelijke kinderen (15x2) zijn er 14 niet nil
Efficientie opslag 14/30 ~ 47%

Graaf van deze binaire zoek boom

	a	b	e	g	j	k	m	n	p	q	s	t	v	w	z
a															
b	1														
e		1			1										
g															
j				1											
k			1								1				
m															
n							1								
p								1		1					
q															
s									1				1		
t															
v												1			1
w															
z														1	

Van de 15x15 (225) verbinding en zijn er 14 gebruikt Efficientie ~ 6% Wel maar 1 bit per verbinding nodig !!

VOORBEELD FOREST

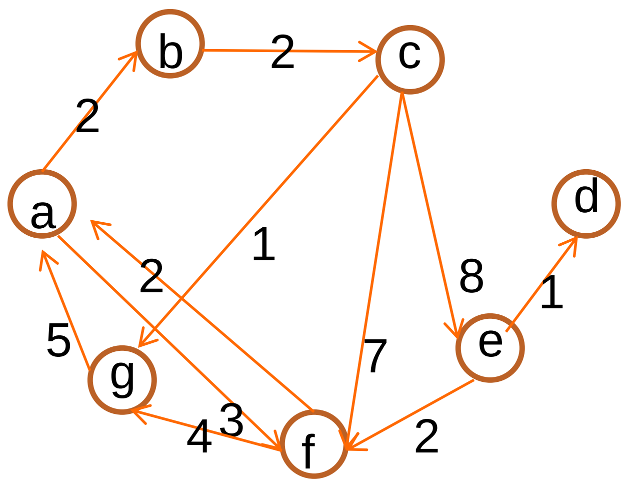
a	b	e	g	j	m	n	p	q	t	v	w	z
		e					p			v		
	b			j		n		q	t			z
a			g		m						w	

Als uit het voorbeeld van de binaire zoekboom k en s worden weggelaten blijven er 3 onderling niet verbonden graaf structuren over die ook m.b.v. een adjacency matrix Weergegeven kan worden

Elke graaf of stel grafen kan m.b.v. een adjacency matrix weergegeven worden

Graaf met gewogen verbindingen

	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	2	∞	∞	∞	3	∞
b	∞	∞	2	∞	∞	∞	∞
c	∞	∞	∞	∞	8	7	1
d	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
e	∞	∞	∞	1	∞	2	∞
f	2	∞	∞	∞	∞	∞	4
g	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞



i.p.v. ∞ kan maxint genomen worden

Verbonden graaf?
Boom?
Kortste pad a->d?
Langste pad a -> d?
Cycles?

Graaf problemen die bekeken worden

- Bekende graaf problemen zijn:
- 1) bepaal of twee knopen in de graaf verbonden zijn
- 2) als de verbindingen gewichten hebben, bepaal een kortste pad van een bepaalde knoop naar al de andere knopen
- 3) in een verbonden graaf bepaal een minimum verbonden subgraaf (spanning tree); als de graaf verbindingen gewichten hebben, zodanig dat de spanning tree minimaal is

Graaf definities

- Graaf (V,E)= knopen (Vertices), bogen: verbindingen tussen knopen (Edges)
- Subgraaf:= deelverzameling van (V,E)
- pad:= reeks verbonden knopen
- Simpel pad:= pad waarin een knoop maar 1 maal voorkomt
- Verbonden graaf:= er is een pad tussen elk paar knopen
- Buurknoop (adjacent):= 2 knopen die met elkaar verbonden zijn
- Buren van een knoop:= verzameling buurknopen van een knoop
- Boom:= verbonden graaf zonder cycli (verbonden graaf met n knopen en n-1 edges -> boom)
- Spanning Tree:= verbonden graaf min cycli
- Oriented Tree:= boom met een root knoop
- Digraaf:= directed graaf; elke verbinding (edge) heeft een richting (direction)
- Weighted graph:= verbindingen hebben een weegfactor

Ad 1) verbindingsstructuur

- Er zijn meerdere manieren om een verbindingsstructuur te representeren
- Veelgebruikt zijn:
- Connectivity matrix
- Knoop en takken lijsten (node & edge lists)

- Vaak worden ook speciale datastructuren gebruikt b.v. in computer grafiek om reden van efficiency

3D Oppervlakte model

- Voor het weergeven van een ruimtelijk oppervlak maakt men vaak gebruik van een benadering met een driehoeksbelegging.
- Voordeel van een driehoeksbelegging is dat:
  - 3 punten een vlak definieren
- Bij wijziging van gezichtspunt:
  - Alleen de 3 hoekpunten (vertices) getransformeerd hoeven te worden (vertex list)
  - De zijdes van een driehoek worden gevormd door verbindingen tussen 2 hoekpunten (edge list)
  - Een oppervlaktenormaal en een textuur gegeven kan zijn voor de positieve halfzijde
  - Hiervoor algoritmes bestaan die een lijnbelegging genereren met belichtingsverloop

Vertex-, edge- en triangle-list

Van de datastructuren hoeft alleen de vertex list getransformeerd te worden, de triangle en edge list waarvan de indexen verwijzen naar de indexen van de (getransformeerde) hoekpunten blijven gelijk

vertex	x	y	z
1	1.14	2.3	-16.8
2	…		
3			
4			
5			
6			
7			
8	…		
9	34.7	18.2	-19.8

edge	vbegin	vend
1	1	2
2	2	3
3	3	1
4	3	4
5	4	1
6	4	5
7	5	1
8	5	6
9	6	1

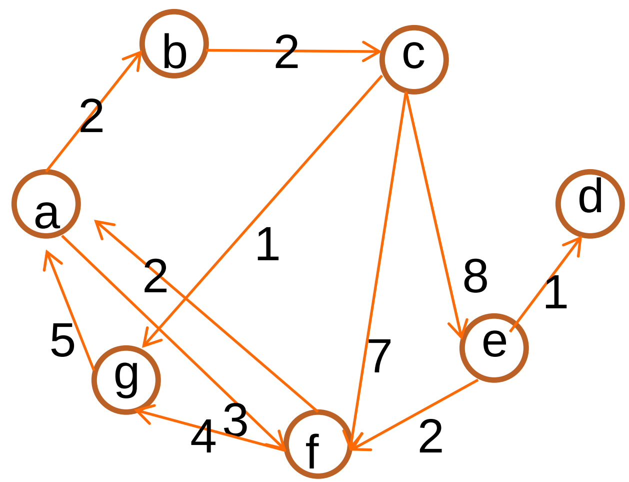
Δ	v1	v2	v3
1	1	2	3
2	1	3	4
3	1	4	5

Graaf wandelingen (graph traversal)

- Om een wandeling af tewerken hebben we per knoop een status veld nodig
- Status [waiting,ready,processed]
- Initieel status=waiting voor alle knopen
- Soorten doorloop:
- Breadth first
- Depth first
- Priority first

Breadth- & Depth-first wandeling
Graaf met gewogen verbindingen

	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	2	∞	∞	∞	3	∞
b	∞	∞	2	∞	∞	∞	∞
c	∞	∞	∞	∞	8	7	1
d	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
e	∞	∞	∞	1	∞	2	∞
f	2	∞	∞	∞	∞	∞	4
g	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞

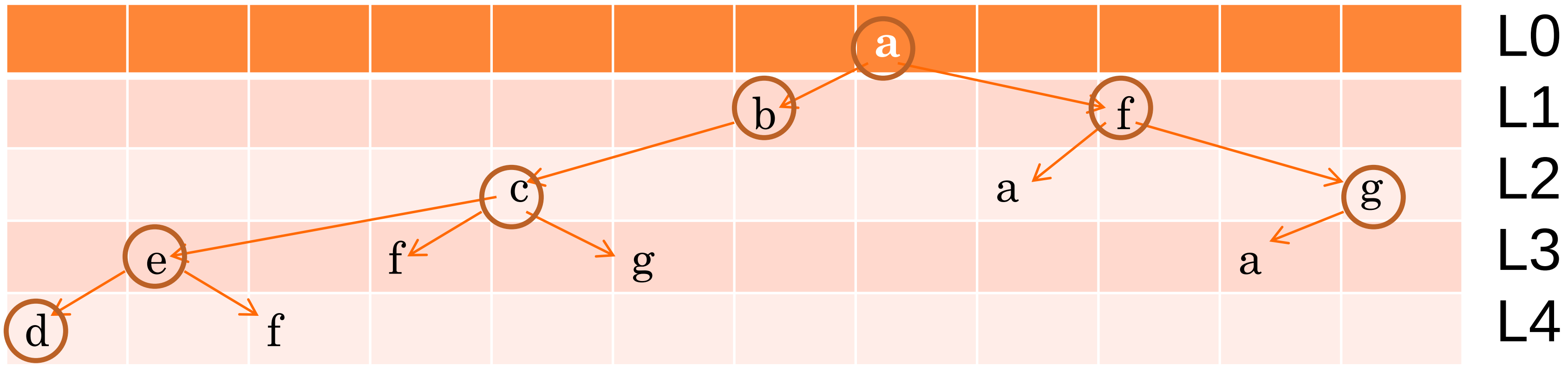


Niet bezocht=0;Bezocht ->1

Breadth-first: a,b,f dan c dan g dan e dan d:a,b,f,c,g,e,d (+priority queue)

Depth-first : a->b dan b->c dan c->e dan e->d dan c->f dan f->g: a,b,c,e,d,f,g (+stack)

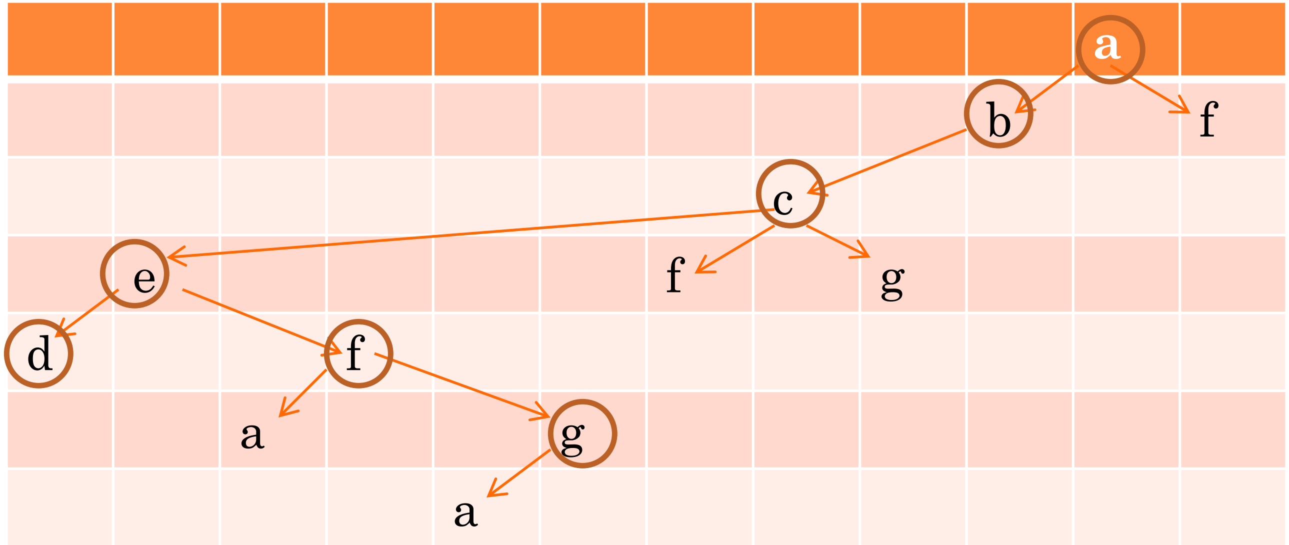
Breadth-first wandeling in gewogen graaf



Li geeft buurafstand tot knoop a weer

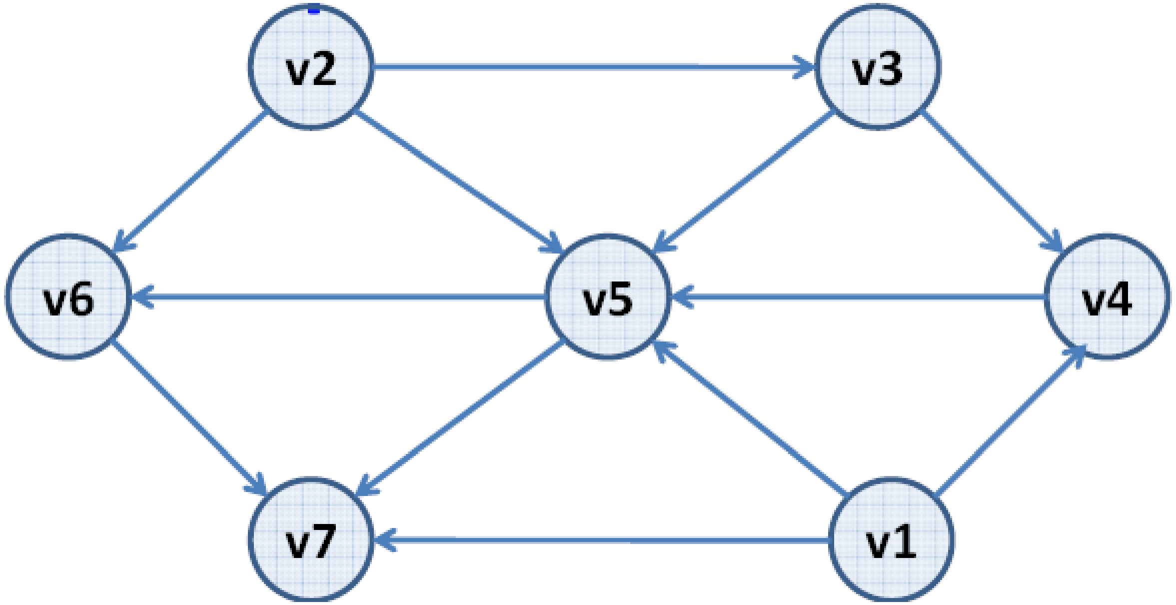
Depth First preOrder wandeling in gewogen graaf

- Volgorde knopen a t/m g



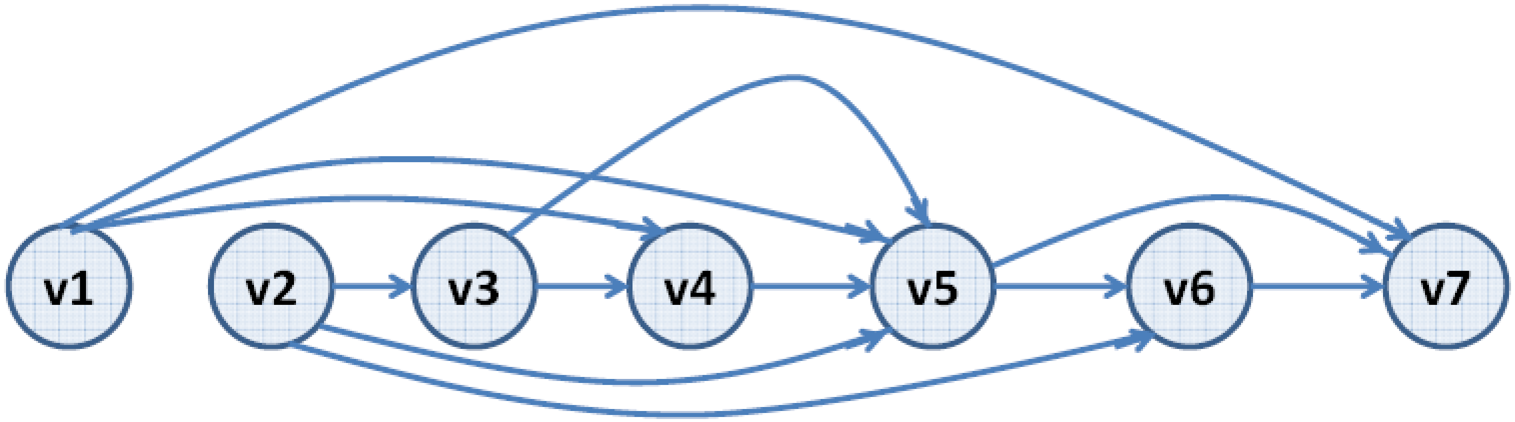
PreOrder wandeling door depthfirst boom omdat wandeling via L1 verbonden buren moet

Topologische sortering van een digraaf kritieke pad algoritme



Heel informeel Algoritme voor lineariseren: zolang er knopen zijn, verwijder een knoop met alleen inkomende takken; verwijder z'n takken en zet deze knoop op stack
Zet op eind rest knopen op stack en voer van stack gehaalde knopen uit

Gelineariseerde acyclische digraaf

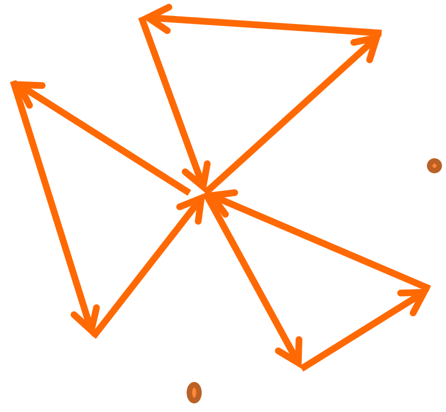


Bipartite grafen

- Een speciaal geval van grafen wordt gevormd door (mogelijke) relaties tussen 2 verzamelingen van objecten N en M, waarvoor een NxM matrix gebruikt kan worden
- Denk aan:
- Matchen van (hetero)partners
- Toewijzen werk aan werknemers gegeven vaardigheden
- Plannen busroutes, bussen en chauffeurs

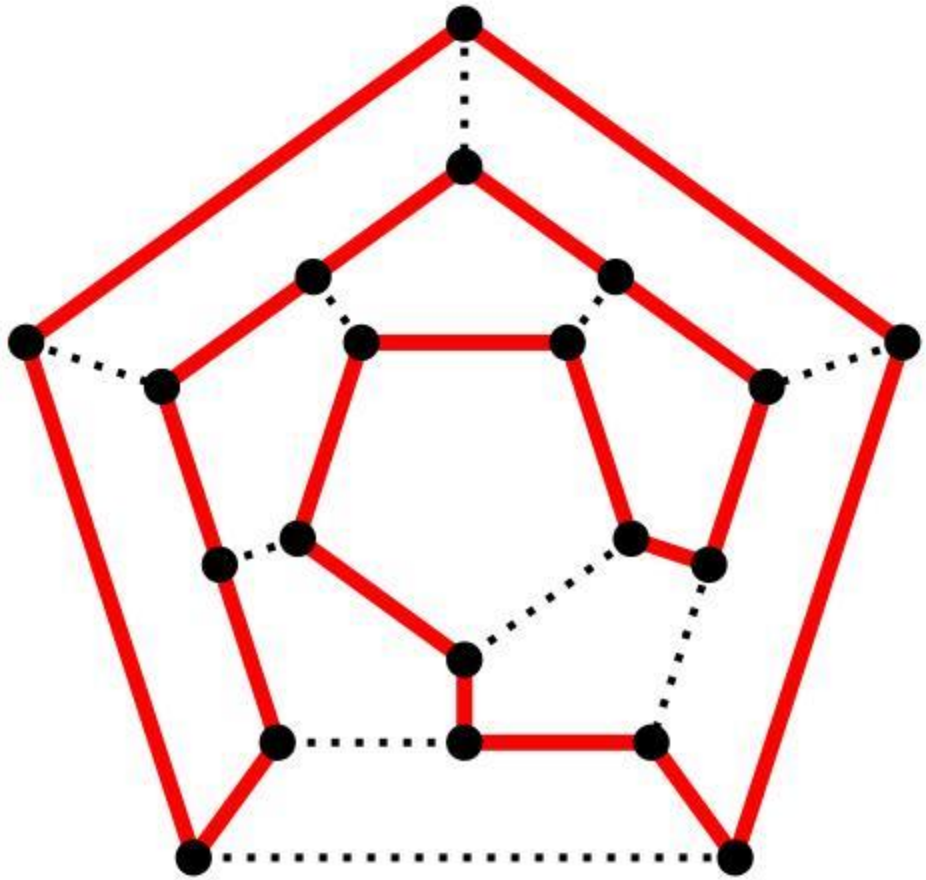
EULER GRAFEN

- Een graaf met een (Euleriaans) spoor dat alle takken precies 1 maal gebruikt
- Een graaf met een Euleriaanse cirkel heeft een gesloten spoor en heet een Euler-graaf
- Knopen in de graaf mogen meermalen bezocht worden en er kunnen losse knopen in voorkomen!!



Hamiltoniaanse cyclus in een graaf

- Een hamiltoniaans gesloten pad in een graaf bezoekt alle knopen precies 1 maal
- Niet alle takken hoeven hierbij doorlopen te worden!!
- Figuur van Christoph Sommer (Creative commons toestemming)



Welke wijziging maakt deze graafwandeling tevens tot een Euleriaans pad?

Drozdek

- H 8.1, 8.5, 8.6, 8.7, 8.8, 8.9, 8.10