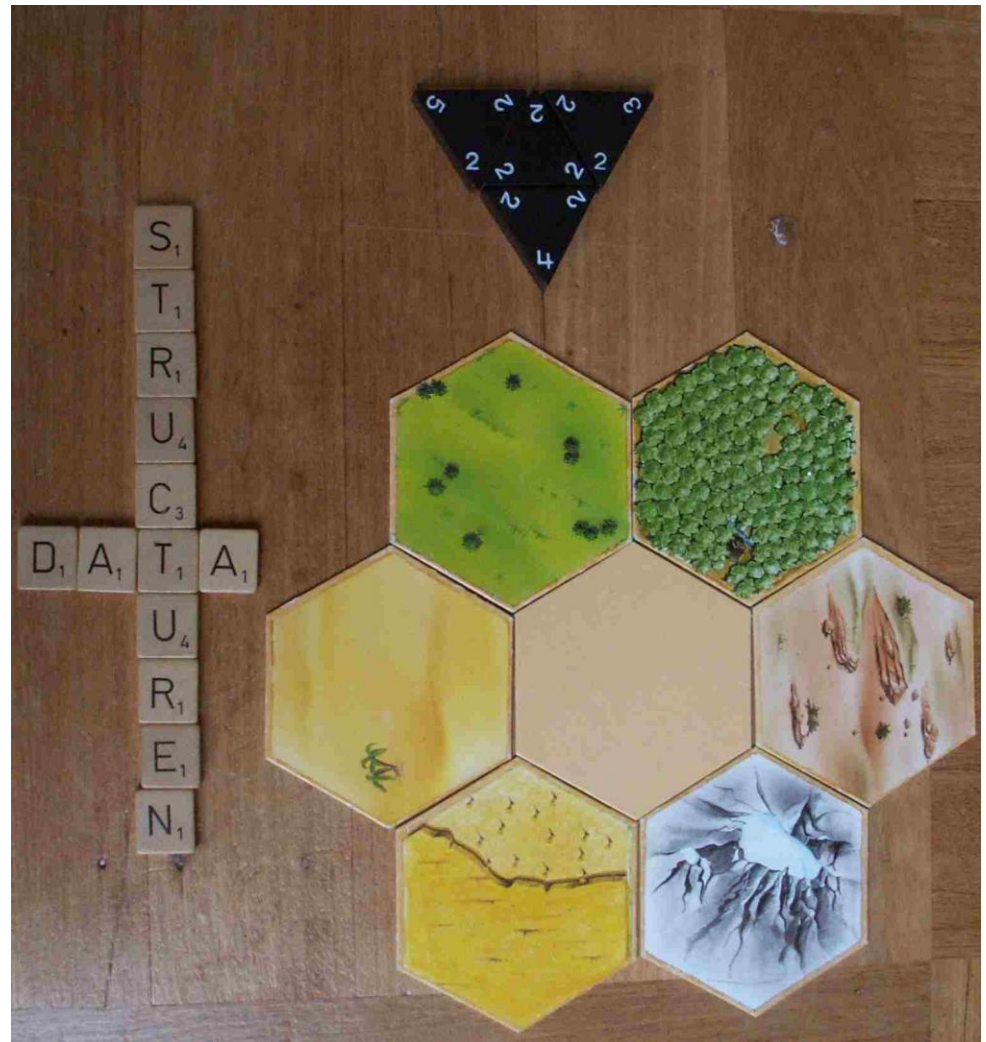


REGELMATIGE OPDELINGEN VAN DE RUIJITE IN PLAT VLAJ EN BOLOPPERVLAJ

DATASTRUCTUREN

1



Dr. D.P. Huijsmans

14 november 2012

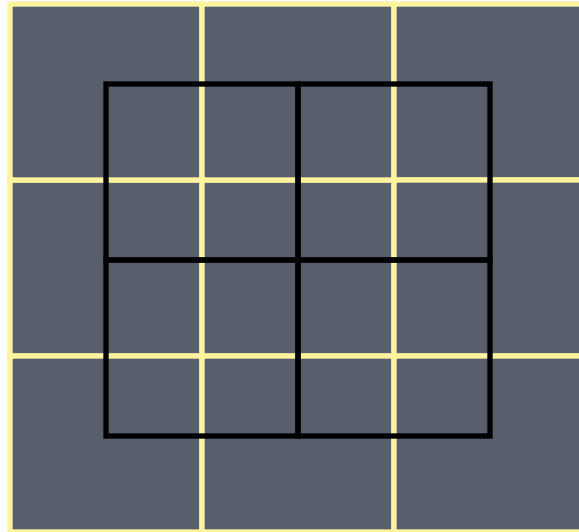
Universiteit Leiden LIACS

DATASTRUCTUREN VOOR BORDSPELEN EN AARDOPPERVLAK

- Bordspelen:
 - Dam, schaak, scrabble, domino, etc.
 - Triominos
 - Catan
- Aardoppervlak (gekromd 2D, periodiek)
- Nodig:
 - Snel toegang tot Lokale samenhang:
 - **Naaste buren** moeten direct gevonden kunnen worden vanuit willekeurig startpunt
 - Datastructuren: **gridstructuren**

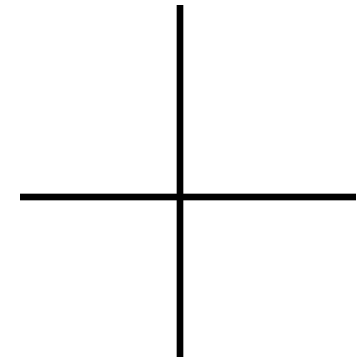
GRID OPBOUW MET EEN VIERKANT

Bordspelen zoals: dam, schaak, scrabble, etc

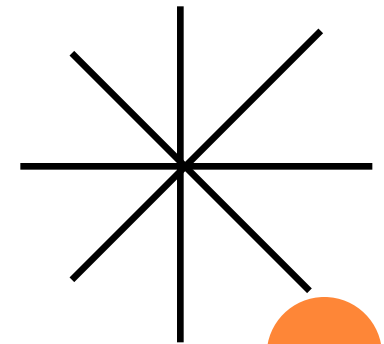


Grid cel is ook een vierkant

Impliciete zwaartepunt positie: zelfde
voor elke rij/kolom: $\text{gridafstand} * (i,j)$



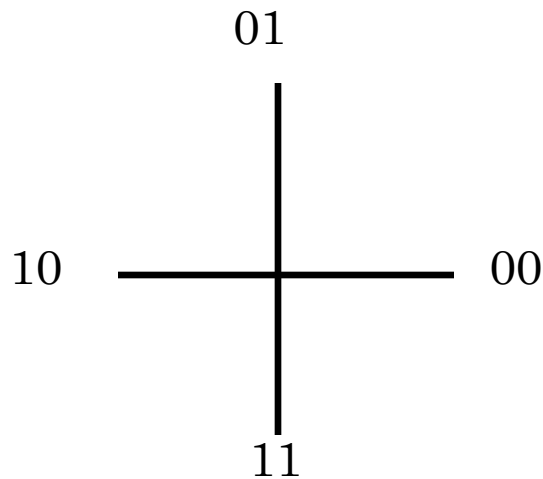
Connectiviteit= 4



Connectiviteit= 8?

NAASTE BUREN VIERKANT GRID?

Connectiviteit= 4

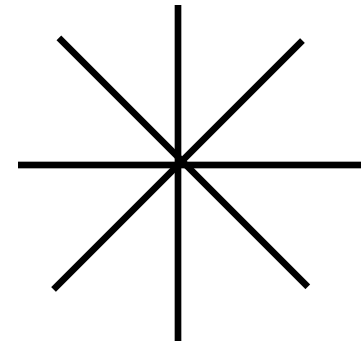


Crack-code (incrementeel):

4 richtingen

2 bit/contour punt

Connectiviteit= 8



Chain-code (incrementeel):

8 richtingen

3 bit/contour punt

SPEELBORD EN BIPARTIETE GRAAF REPRESENTATIE

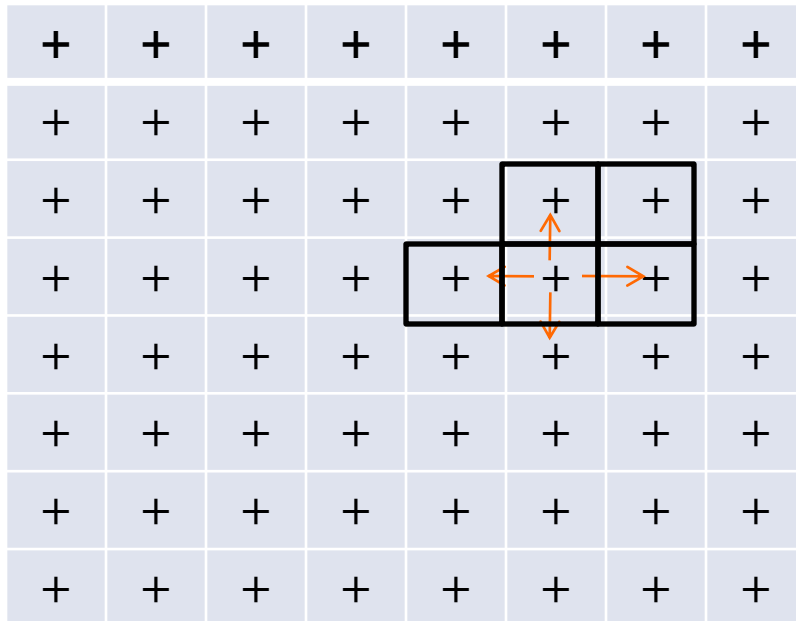
Een speelbord kan qua vakken ingedeeld worden in rijen en kolommen (b.v. daar waar zwaartepunten vertikaal dan wel horizontaal op een lijn liggen)

De positie vertikaal, horizontaal kan dan worden aangegeven met een integer index i, j

We zijn geïnteresseerd in alle **kruispunten** van indexen i, j dat wil zeggen in de **volledige bipartite graaf van i en j**

In deze volledige bipartite graaf wordt voor elk kruispunt $[i, j]$ informatie opgeslagen over de tegel/speelvak ter plaatse b.v.: bezet Y/N, ID van tegel, zichtbaar/niet, kleur damstuk Z/W, orientatie triomino, hoekcijfers ijk triomino etc.

TRIVIALE AFBEELDING VIERKANTE TEGELS OP VIERKANT GRID



$Dx=Dy=1$
Naaste buur
afstand=1
Oppervlak
tegel=1
Zijde tegel=1

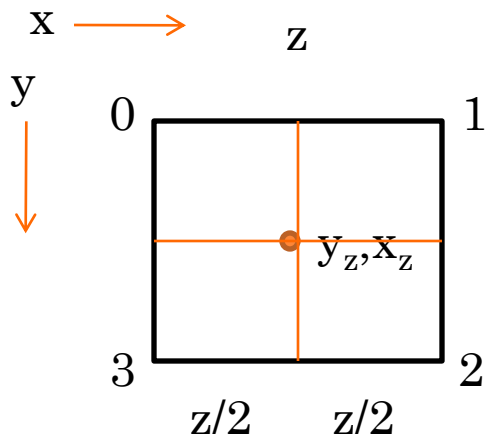
Op het kruispunt van rij en kolom kan unieke ID van de tegel opgeslagen worden
Voor elke tegel kan in een ID array rij en kolom nr van het speelveld (grid/adjacency matrix) worden opgeslagen

FYSIEKE LOCATIE TEGEL [I,J] IN VIERKANT GRID

Met vierkante tegel zijde z en rij en kolom indexen i,j :
 $i,j \in [0..\max]$ oorsprong linksboven; vertikaal y , horizontaal x

Zwaartepunt tegel $[0,0]$ $y_z = z/2$; $x_z = z/2$

Zwaartepunt tegel $[i,j]$: $y_z = z/2 + iz$; $x_z = z/2 + jz$



Als zwaartepunt vierkante tegel met zijde z is y_z, x_z dan zijn de coördinaten van:

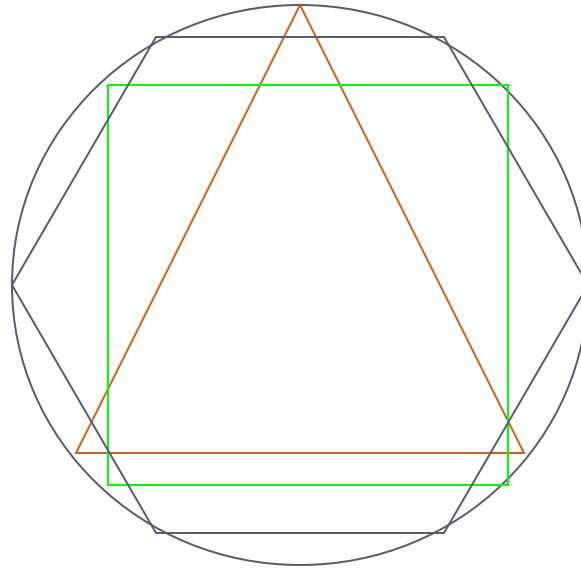
$$\text{Hoekpunt0} = y_z - z/2, x_z - z/2$$

$$\text{Hoekpunt1} = y_z - z/2, x_z + z/2$$

$$\text{Hoekpunt2} = y_z + z/2, x_z + z/2$$

$$\text{Hoekpunt3} = y_z + z/2, x_z - z/2$$

BORDSPELEN ZIJN VAAK GEBASEERD OP GELIJKZIJDIGE VEELHOEKEN



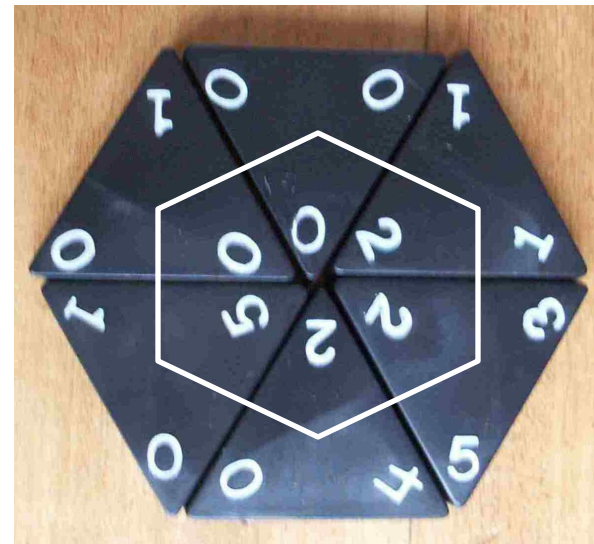
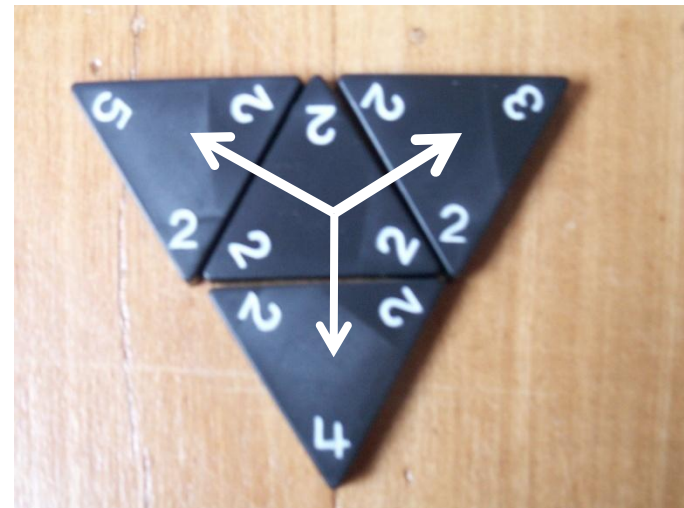
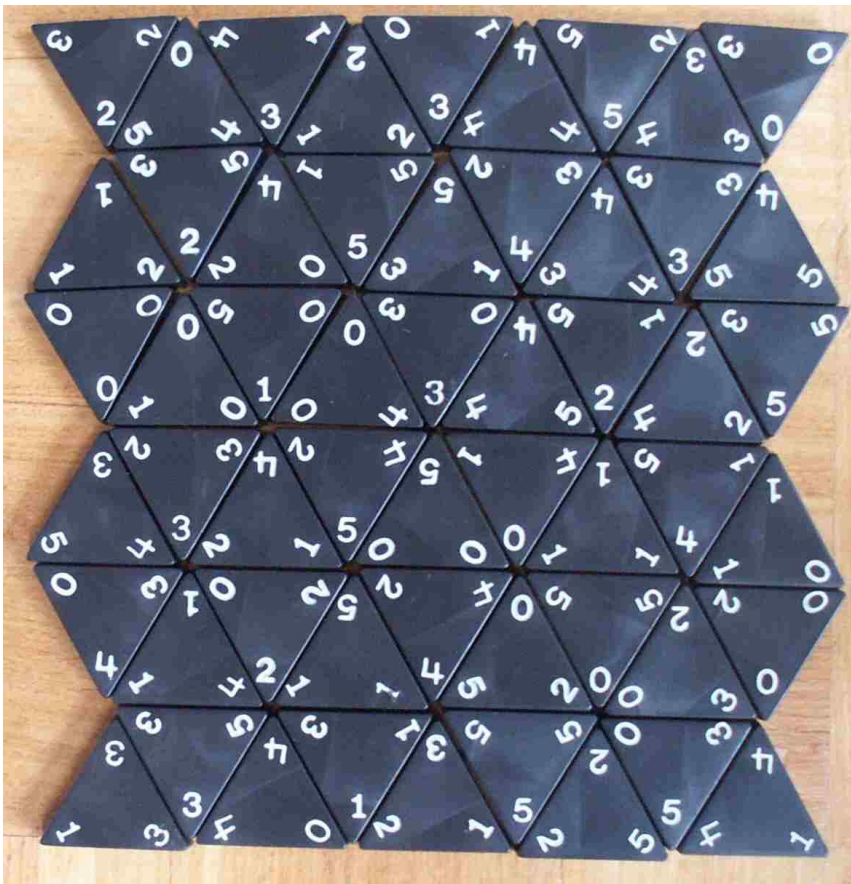
Gelijkzijdige veelhoeken die geschikt zijn om 2D op te vullen (**space fillers**):

Gelijkzijdige driehoek, vierkant, hexagon (gelijkzijdige zeshoek)

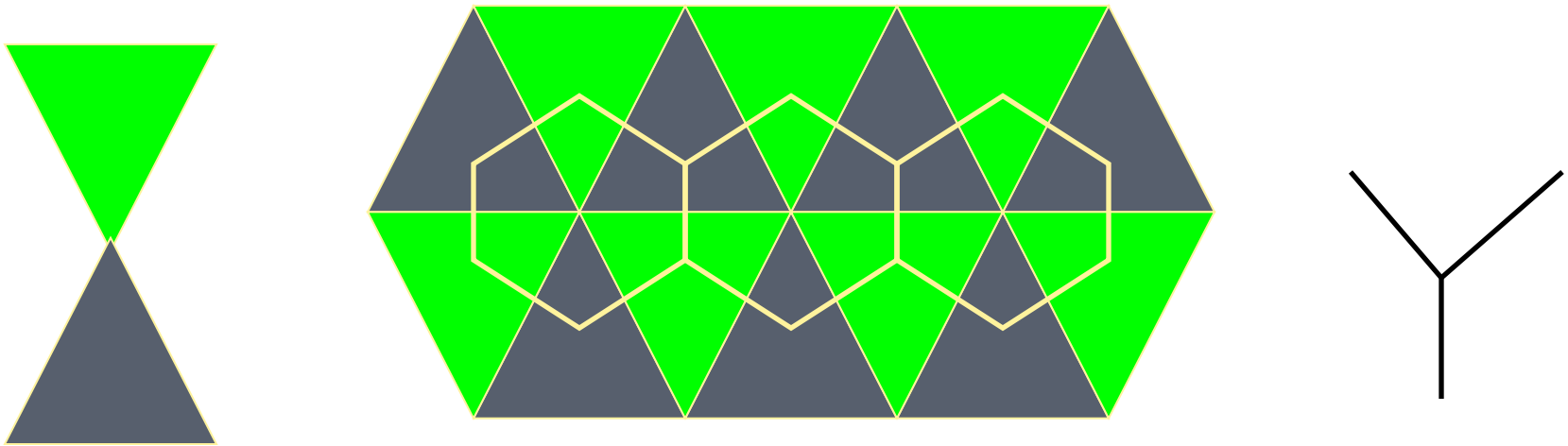
Elk van deze ruimtevullers heeft een eigen lokale verbindingsstructuur

Connectiviteit: = het aantal naaste burens

TRIOMINO GRID EN NAASTE BUREN (5E PROG.OPDRACHT OVER TRIOMINO'S)



GRID OPBOUW MET EEN GELIJKZIJDIGE DRIEHOEK



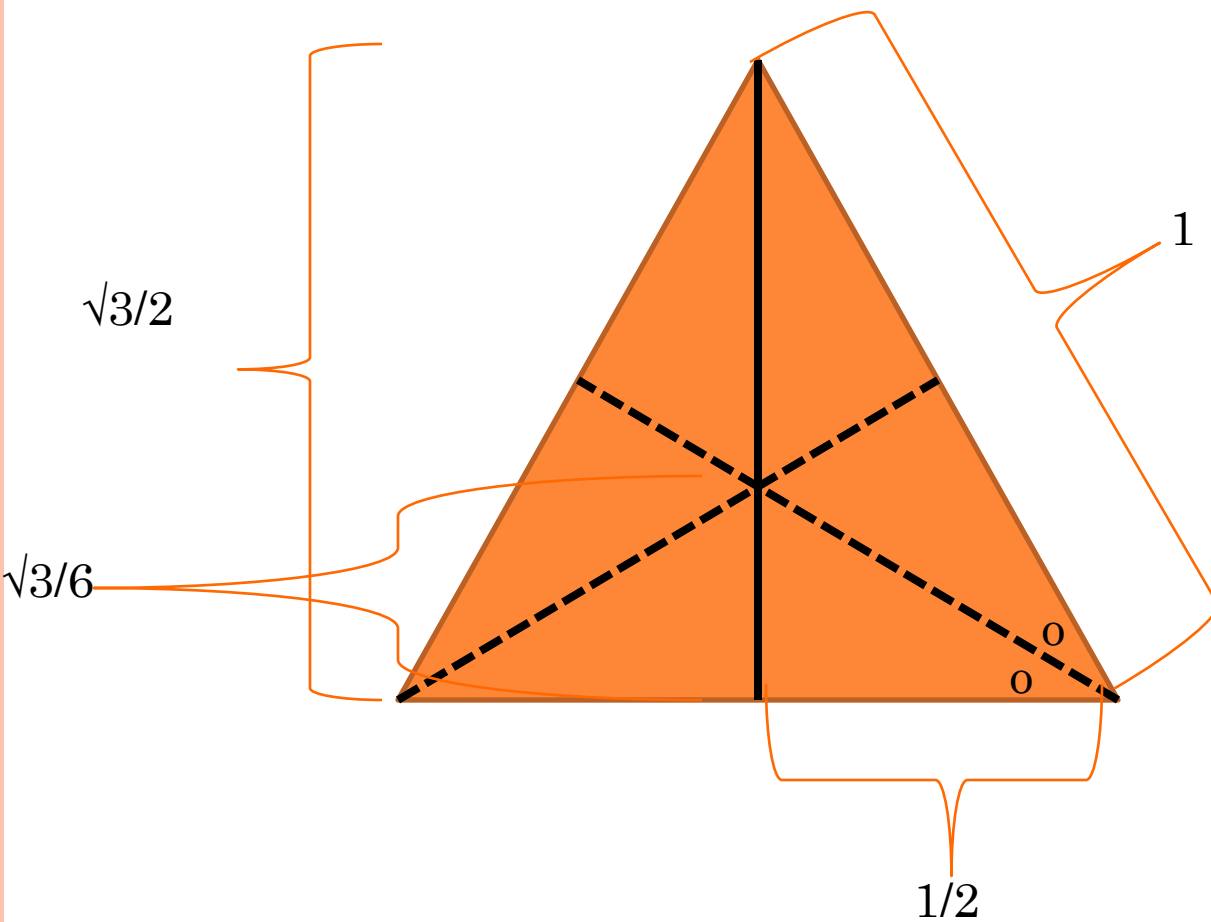
Connectiviteit= 3

Grid cel is hexagon

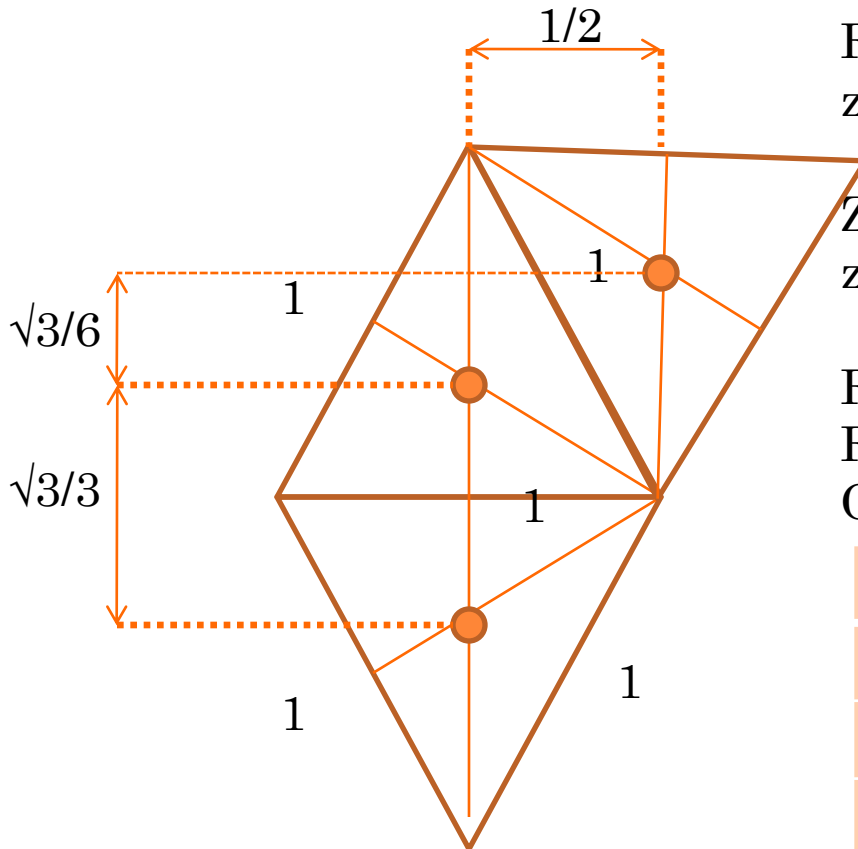
Posities middelpunten gelijkzijdige driehoeken:

Om de 2 regels een halve grid afstand verspringend

GELIJKZIJDIGE DRIEHOEKEN EN ZWAARTEPUNT POSITIES



VERBAND ZIJDE DRIEHOEK EN ROOSTERAFSTAND



Roosterafstand = afstand tussen zwaartepunten buurdriehoeken

Zwaartepunt = snijpunt zwaartelijnen op $1/3$ van basis

Roosterafstand $D_y = \sqrt{3}/6$ (zijde=1)

Roosterafstand $D_x = 1/2$

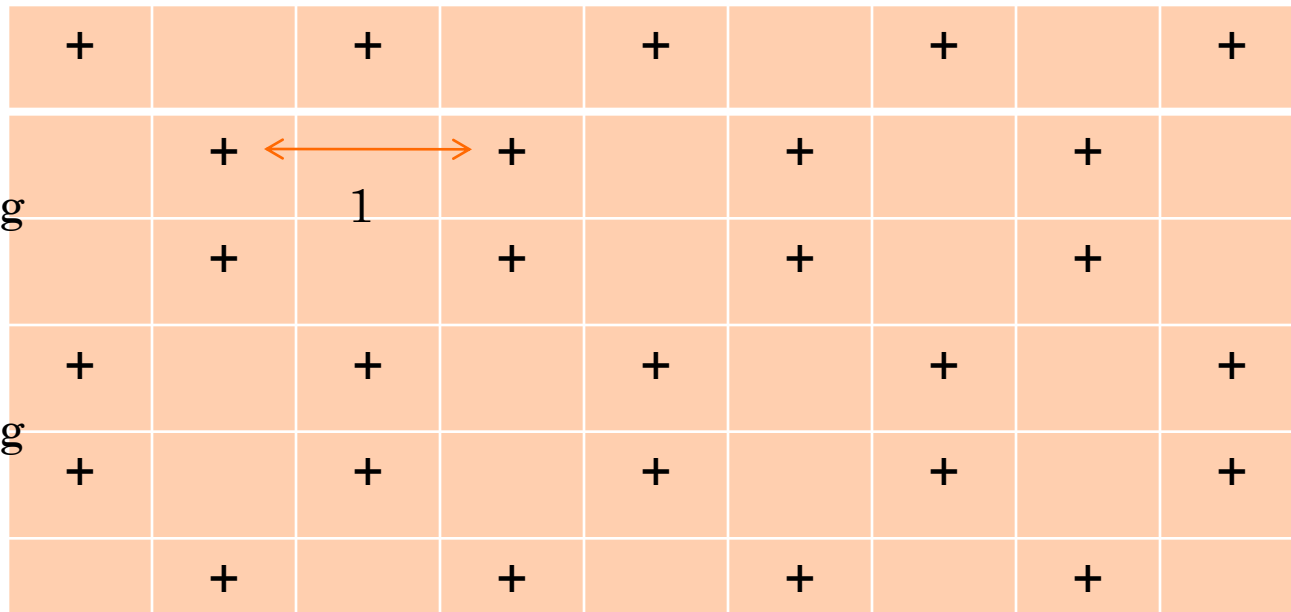
Oppervlak = $\sqrt{3}/2$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | + | | + | | + |
| + | | + | | + | |
| | | | | | |
| + | | + | | + | |
| | + | | + | | + |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | + | | + | | + |

→
 $D_x = 1/2$
 $D_y = \sqrt{3}/6$
 ↓

Door zwaartepunten Δ betegeling kan een rechthoekig D_y, D_x grid gelegd worden

MIDDELPUNTEN GRID STRUCTUUR Δ



$\sqrt{3}/6$
 $\sqrt{3}/3$

Lege rij weg

Lege rij weg

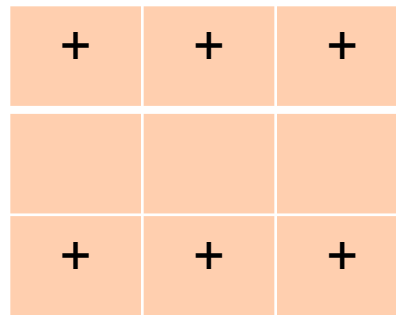
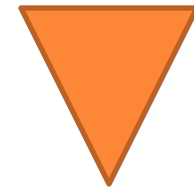
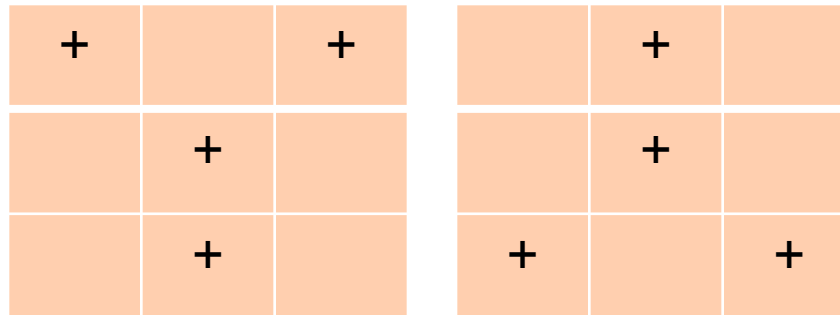
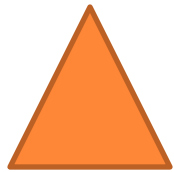


3 NAASTE BUREN IN 8-VERBONDEN INGEDIKT RECHTHOEKIG GRID

| | | | | | | | | |
|----|----|----|---|---|---|---|---|---|
| + | | + | | + | | + | | + |
| | 12 | | + | | + | | + | |
| | 25 | | + | | + | | + | |
| 34 | | 55 | | + | | + | | + |
| + | | + | | + | | + | | + |
| | + | | + | | + | | + | |

Als we de indexen van de individuele triominos op de plus posities opslaan van het half-gevulde 4 vierkantsgrid, dan heeft elke 8-verbonden omgeving van een bezette positie precies 3 gevulde naaste burenen, die de 3-verbonden burenen van het driehoeksgrid vertegenwoordigen

BEZETTING 8-VERBONDEN BUURPOSITIES



Alleen deze 6 buurposities hoeven maar
doorzocht te worden

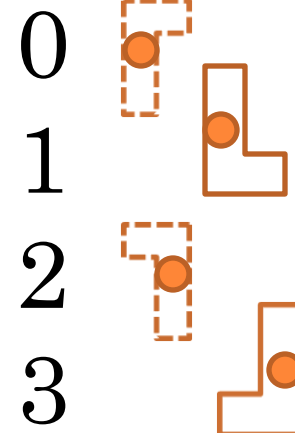
Buurconfiguraties na complete aanschuiving naar links

| | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | + | | 2 | | 6 | | + | | + |
| 1 | | 12 | | 11 | | + | | 9 | |
| 2 | | 25 | | 3 | | 13 | | 43 | |
| 3 | 34 | | 55 | | 7 | | 50 | | 22 |
| | + | | + | | 19 | | 21 | | + |
| | | + | | 40 | | 47 | | + | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| 0 | + | 2 | 6 | + | + |
| 1 | 12 | 11 | + | 9 | |
| 2 | 25 | 3 | 13 | 43 | |
| 3 | 34 | 55 | 7 | 50 | 22 |
| | + | + | 19 | 21 | + |
| | + | 40 | 47 | + | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Aftastvolgorde naaste 3 burenen:

Als rij i modulo 4 =



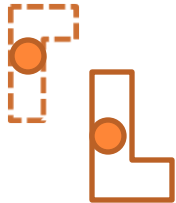
Na verwijdering alle niet bezette gridposities en aanschuiven naar links

L-TEMPLATE VOOR AFTASTEN NAASTE BUREN Δ -BETEGELING OP VIERKANT GRID

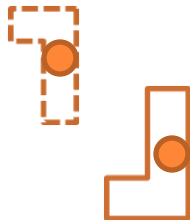
Aftastvolgorde naaste 3 buren:

Als rij i modulo 4 =

0



1



2

3

Naaste buren configuratie0:

$i-1, j$

$i-1, j+1$

$i+1, j$

Naaste buren configuratie1:

$i-1, j$

$i+1, j$

$i+1, j+1$

Naaste buren configuratie2:

$i-1, j$

$i-1, j-1$

$i+1, j$

Naaste buren configuratie3:

$i-1, j$

$i+1, j$

$i+1, j-1$

FYSIEKE LOCATIE TEGEL[I,J] IN Δ -GRID

Rij 0 start met tegel op top;

rij 1 naar rechts verschoven met tegel op basis

Maat zijde tegel is z

Zwaartepunt tegel[0,0] op $y_z = \sqrt{3}z/6$ en $x_z = z/2$

Twee modulo functies zijn nodig vanwege:

-- Samenneming van 3 halfgridrijen naar 2 vierkantgridrijen

-- inspringstructuur die zich om de 4 regels herhaalt

Zwaartepunt tegel[i,j]: $k = i \bmod 2$ $l = i \bmod 4$ $n = i/2$

$$y_z = \sqrt{3}z/6 + n\sqrt{3}z/2 + kz\sqrt{3}/6$$
$$= \sqrt{3}z/6 (3n + k + 1)$$

$x_z =$

$$l = 0 \quad z/2 + j*z/2 = z/2(j+1)$$

$$l = 1 \quad z + j*z/2 = z/2(j+2)$$

$$l = 2 \quad z + j*z/2 = z/2(j+2)$$

$$l = 3 \quad z/2 + j*z/2 = z/2(j+1)$$

NORMAAL VIERKANT GRID VOOR TRIOMINOS

In plaats van een vierkant grid dat maar voor de helft beschikbaar is voor mogelijke triomino posities, kunnen we ook een normale adjacency matrix gebruiken mits we:

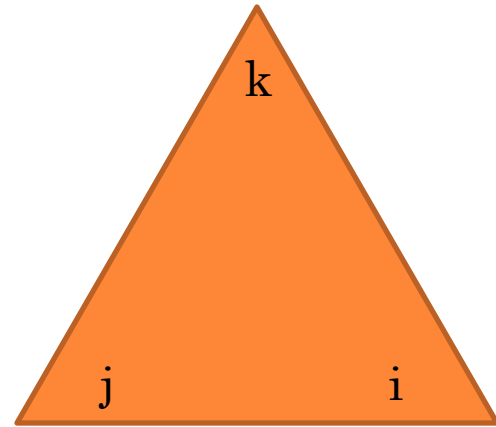
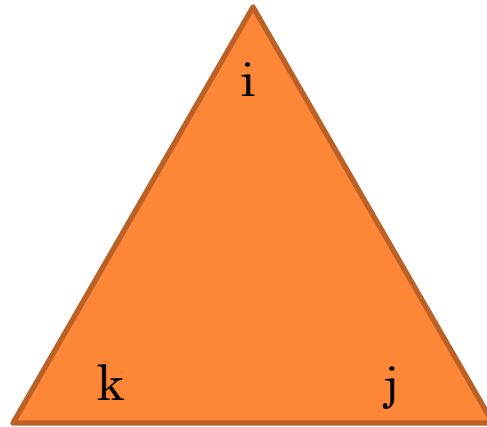
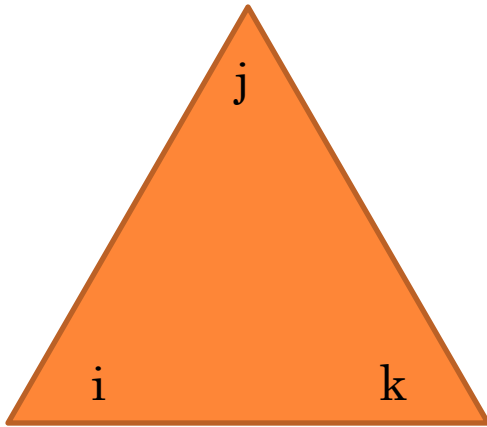
- afhankelijk van het rijnummer het vierkante aftastvenster voor 8 naaste burens aanpassen naar een L-vormig venster voor 3 naaste burens

We hebben nu wel een bruikbare representatie voor de posities waarop een bepaald genummerd triomino geplaatst kan worden, maar nog geen voorziening voor:

- De orientatie van een bepaalde triomino
- De aansluiting op (een) buurtriomino(s)

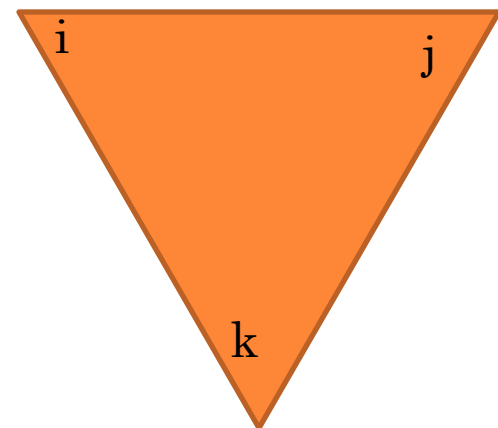
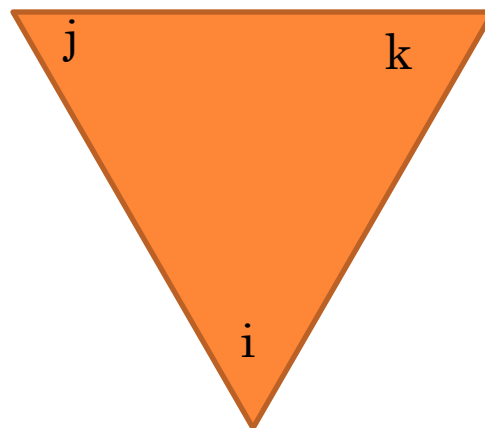
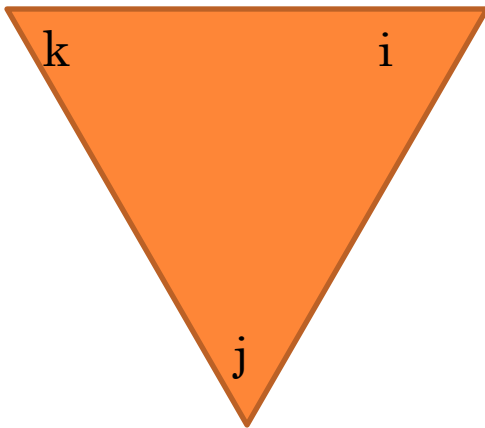
TRIOMINO ORIENTATIES

Oneven rijen orientatie basis: ij,ki,jk of ijk,kij,jki (ijk cyclisch rond)



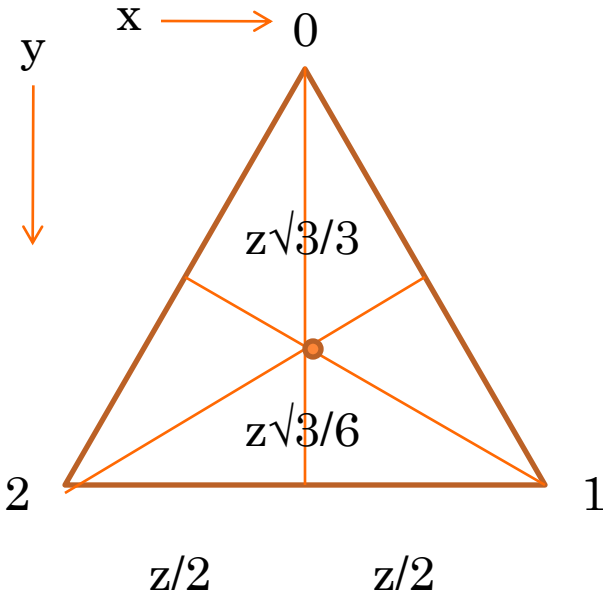
Orientatie $O \in [0..5]$ geeft 3 mogelijke combinaties voor aansluiting

Orientatie basis ($O \in [0..2]$) kan alleen aansluiten op orientatie top ($O \in [3..5]$)



Even rijen Orientatie top:ij,ki,jk of ijk,kij,jki (ijk cyclisch rond)

HOEKPUNTEN DRIEHOEKSTEGELS

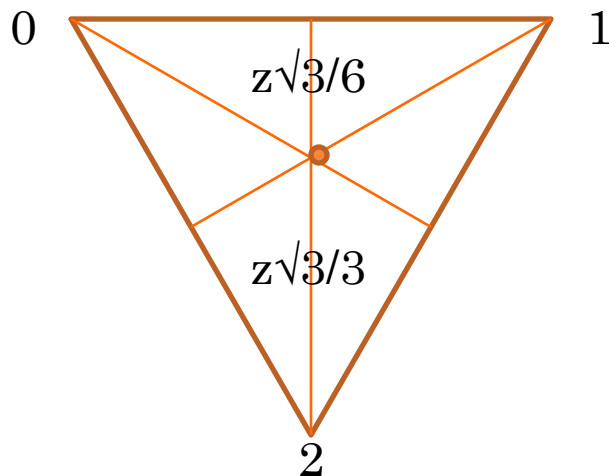


Als zwaartepunt Δ -tegel is y_z, x_z dan zijn met zijde z de coördinaten van de hoekpunten bij **basisorientatie**:

$$\text{Hoekpunt0} = y_z - z\sqrt{3}/3, x_z$$

$$\text{Hoekpunt1} = y_z + z\sqrt{3}/6, x_z - z/2$$

$$\text{Hoekpunt2} = y_z + z\sqrt{3}/6, x_z + z/2$$



Als zwaartepunt Δ -tegel is y_z, x_z dan zijn met zijde z de coördinaten van de hoekpunten bij **toporientatie**:

$$\text{Hoekpunt0} = y_z - z\sqrt{3}/6, x_z - z/2$$

$$\text{Hoekpunt1} = y_z - z\sqrt{3}/6, x_z + z/2$$

$$\text{Hoekpunt2} = y_z + z\sqrt{3}/3, x_z$$

AANSLUITING MET BUURTRIOMINO

Een triomino kan in elk hoekpunt een getal $i, j, k \in [0..5]$ hebben; zijdes kunnen derhalve gekarakteriseerd worden door het getal aan het begin- en eindpunt van de zijde ij dan wel $ji \in [00..55]$

Dit geldt zowel met de klok mee als er tegenin.

Ongeacht of de triomino op z'n basis (oneven rijen) of op z'n tophoek (even rijen) wordt ingevoegd zijn dezelfde 3 combinaties beschikbaar m.b.t. een buurzijde nl ij, ki, jk

Zijdes van 2 triominos passen tegen elkaar als hun zijde codes omgekeerd zijn ($ij \leftrightarrow ji$)

Als een triomino buuren heeft, dan moet voor elke buur de code van de aanliggende buurzijde het omgekeerde zijn van die van de betreffende triomino zijde

Uit de voorgaande slide kunnen we afleiden dat het voor mogelijke aansluiting niet uitmaakt of de triomino in **basis-** dan wel **toporientatie** wordt toegevoegd: beide bieden **dezelfde aansluitmogelijkheden.**

56 TRIOMINO STENEN

Nr:i,j,k

1:0,0,0

2:0,0,1

3:0,0,2

4:0,0,3

5:0,0,4

6:0,0,5

7:0,1,1

8:0,1,2

9:0,1,3

10:0,1,4

11:0,1,5

12:0,2,2

13:0,2,3

14:0,2,4

15:0,2,5

16:0,3,3

17:0,3,4

18:0,3,5

19:0,4,4

Nr:i,j,k

20:0,4,5

21:0,5,5

22:1,1,1

23:1,1,2

24:1,1,3

25:1,1,4

26:1,1,5

27:1,2,2

28:1,2,3

29:1,2,4

30:1,2,5

31:1,3,3

32:1,3,4

33:1,3,5

34:1,4,4

35:1,4,5

36:1,5,5

37:2,2,2

38:2,2,3

Nr:i,j,k

39:2,2,4

40:2,2,5

41:2,3,3

42:2,3,4

43:2,3,5

44:2,4,4

45:2,4,5

46:2,5,5

47:3,3,3

48:3,3,4

49:3,3,5

50:3,4,4

51:3,4,5

52:3,5,5

53:4,4,4

54:4,4,5

55:4,5,5

56:5,5,5

$i,j,k \in [0..5]$

monotoon, niet
dalende reeks

Op tegel met de
Klok mee

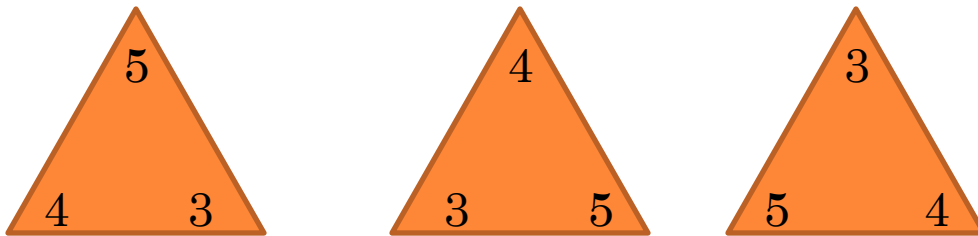
b.v. 0,2,2 wel
2,1,1 niet

Codes zijdes:

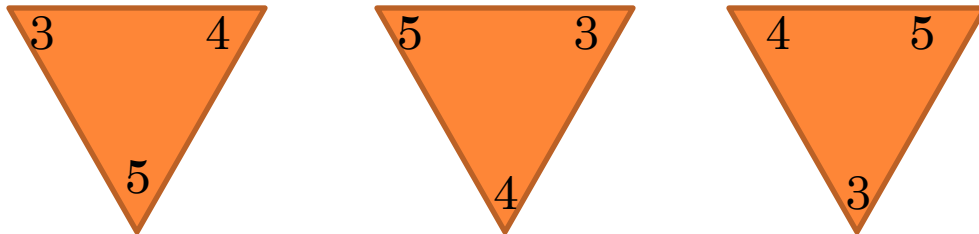
Cyclisch 2
opvolgende
uit 3

b.v. basis
28:21,32,13
top
28:12,31,23

AANSLUITENDE TEGELS



Basis orientatie 28:
startpositie



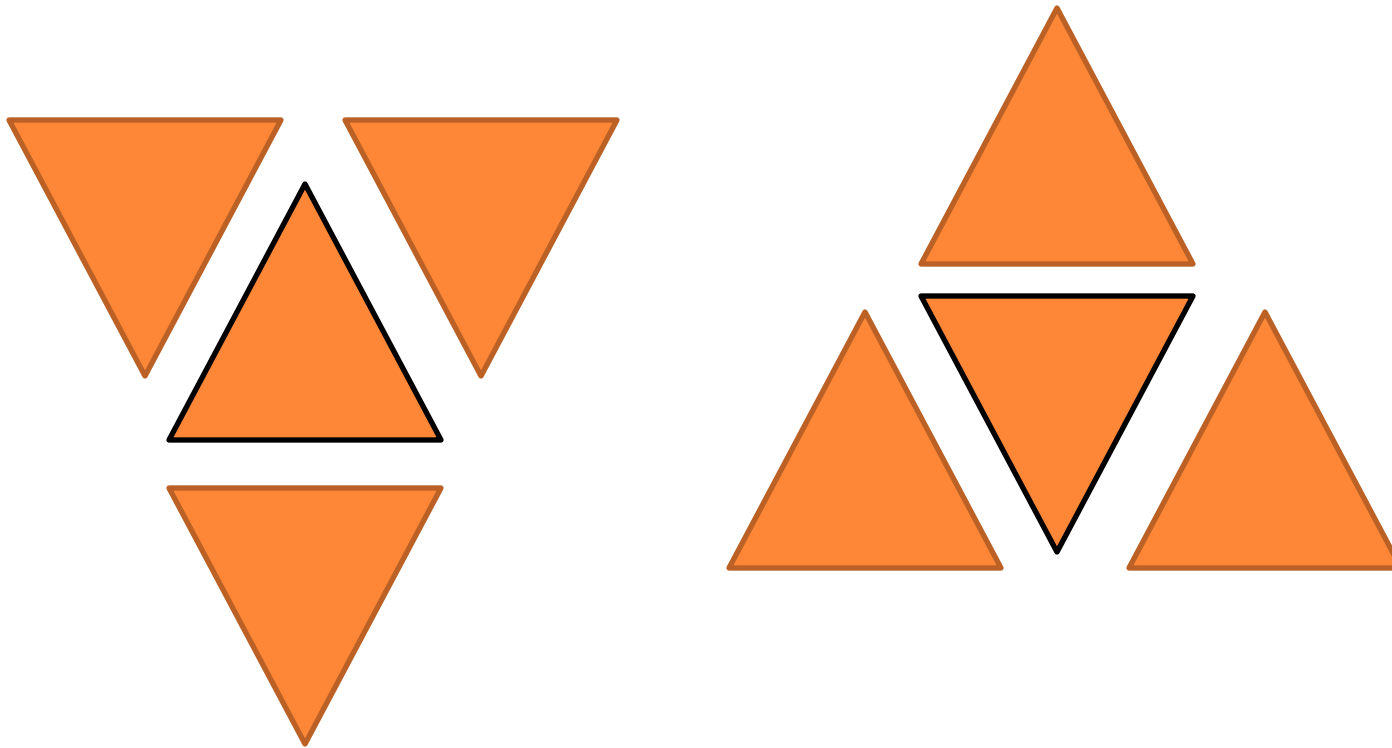
Top orientatie 28:
startpositie

Elke tegel:
3 basisorientaties;
3 toporientaties

Aansluitvoorschrift:
Gelijke cijfers voor
aansluitende zijdes
top:basis
orientatiepaar

Hier geen aansluit
mogelijkheid

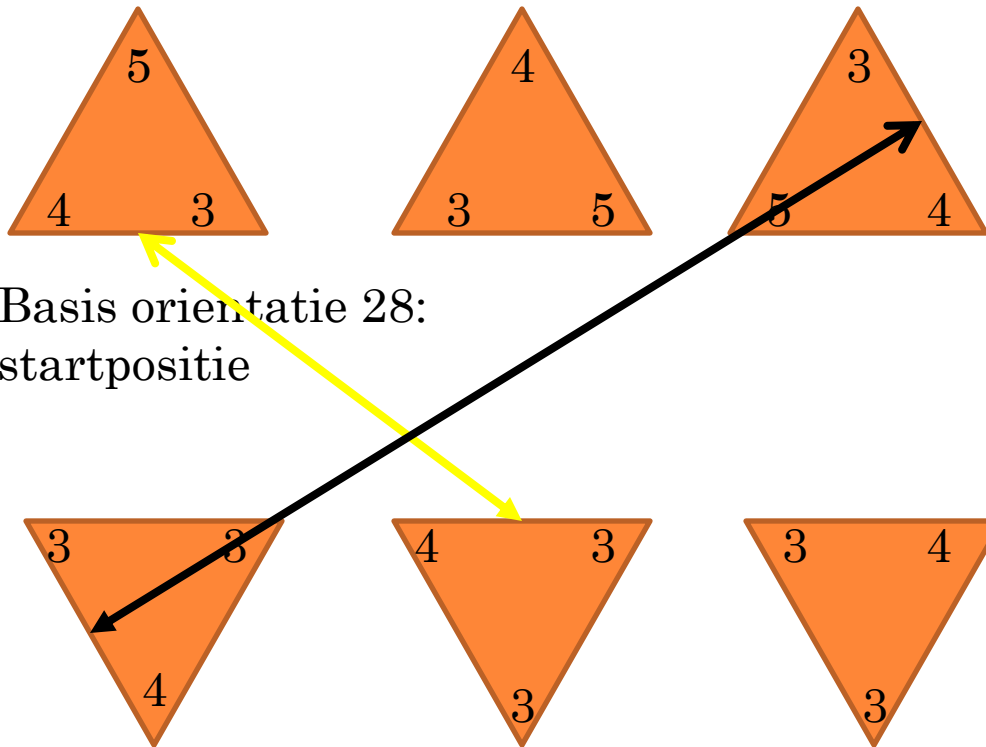
AANSLUITENDE TEGELS



3 mogelijkheden voor top aan gegeven basis orientatie
3 mogelijkheden voor basis aan gegeven toporientatie

Het is dus handig apart de beschikbare top en
basiscodeparen op te slaan bij de 56 tegels
evenals welke aansluitzijde al/niet bezet is

AANSLUITENDE TEGELS



Basis orientatie 28:
startpositie

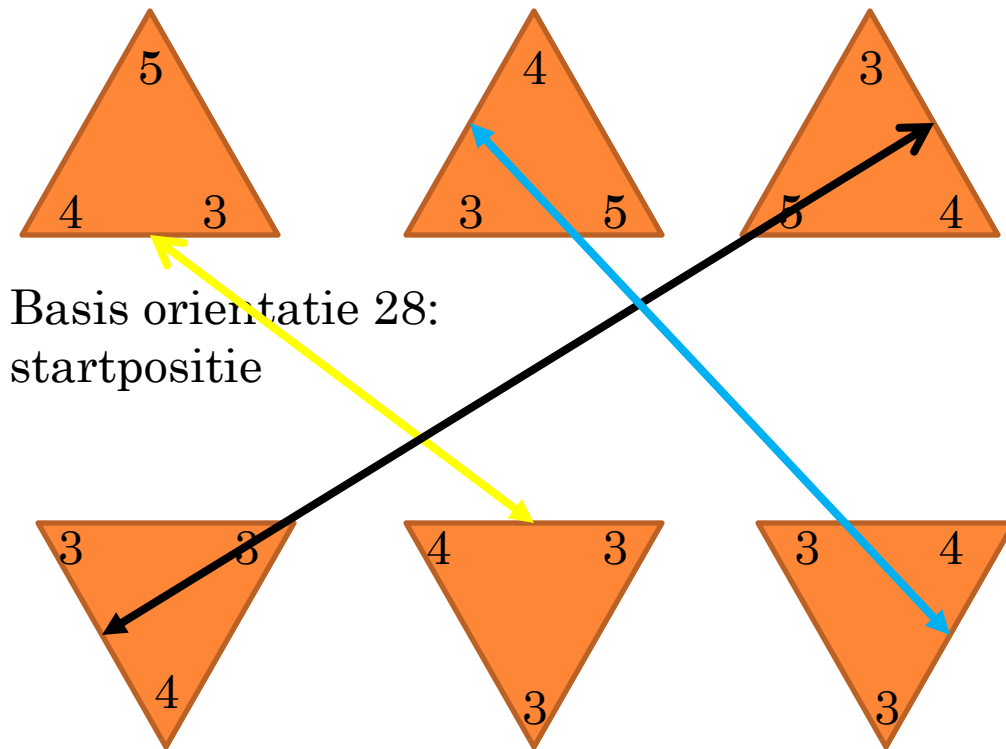
Top orientatie 48:
startpositie

Aansluitvoorschrift:
Gelijke cijfers voor
aansluitende zijdes

Aleen mogelijk bij
top:basis
orientatiepaar

Hier 2 aansluit
mogelijkheden?

AANSLUITENDE TEGELS



Basis orientatie 28:
startpositie

Top orientatie 48:
startpositie

Aansluitvoorschrift:
Gelijke cijfers voor
aansluitende zijdes

Aleen mogelijk bij
top:basis
orientatiepaar

Toch 3 aansluit
mogelijkheden

DATASTRUCTUUR VOOR ADMINISTRATIE MATCHES TUSSEN BUURTRIOMINOS

Via het vierkante grid kan worden bijgehouden welke triomino welke maximaal 3 andere triominos als burens heeft;
Van de geplaatste triomino is naast een uniek nummer voor elke triomino ($\text{trionr} \in [00..55]$) (er zijn 56 triominos) nodig:
de orientatie waarmee hij geplaatst is
de rij,kolom positie waarop hij geplaatst is

We hebben zo een $O(1)$ methode om via de ID van een tegel zijn positie op het speelbord te vinden $\text{ID} \rightarrow i,j$
De naaste burens van i,j kunnen $O(1)$ opgezocht worden gebruikmakend van het juiste L-template.

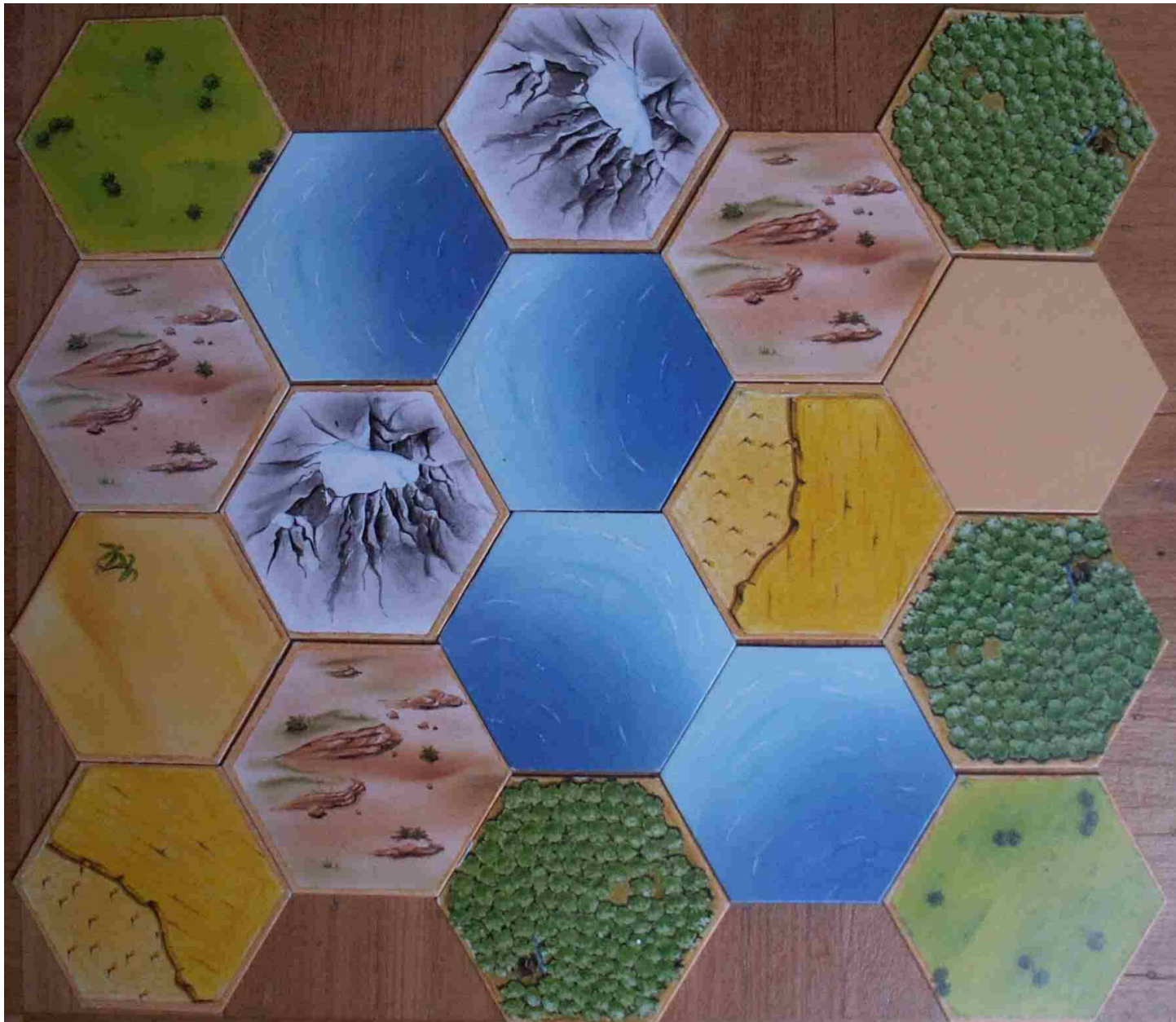
De rest is een kwestie van je aan de spelregels houden

BEGINVOORWAARDEN TRIOMINO OPZET MET VIERKANT GRID

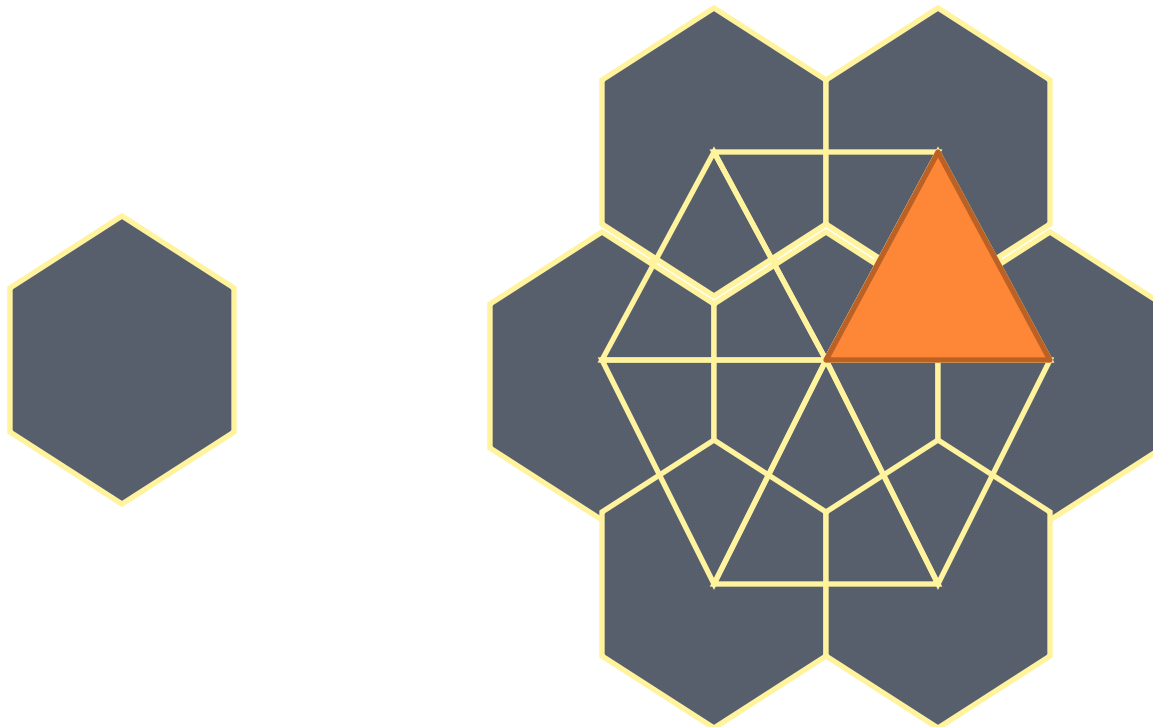
Als we een groot genoeg matrix willen reserveren (het speelbord) en een geschikt startpunt voor de eerste triomino, dan moet het aaneengesloten eindresultaat niet buiten de matrix kunnen komen.

Wat is de langste slang van triominos die gevormd kan worden? Afgezien van of de aansluitvoorwaarden dat toelaten, kan vanuit het midden van het speelbord nooit verder dan 55 stappen naar links, rechts, boven of onder gekomen worden, Zodat een speelveld van 111×111 plaatsen waar op $55, 55$ de startsteen wordt gezet altijd voldoende zal zijn.

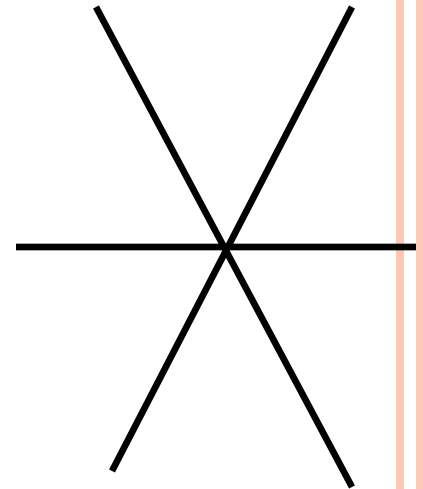
EEN SPELBORD VOOR CATAN



GRID OPBOUW VOOR EEN GELIJKZIJDIGE ZESHOEK (HEXAGON)



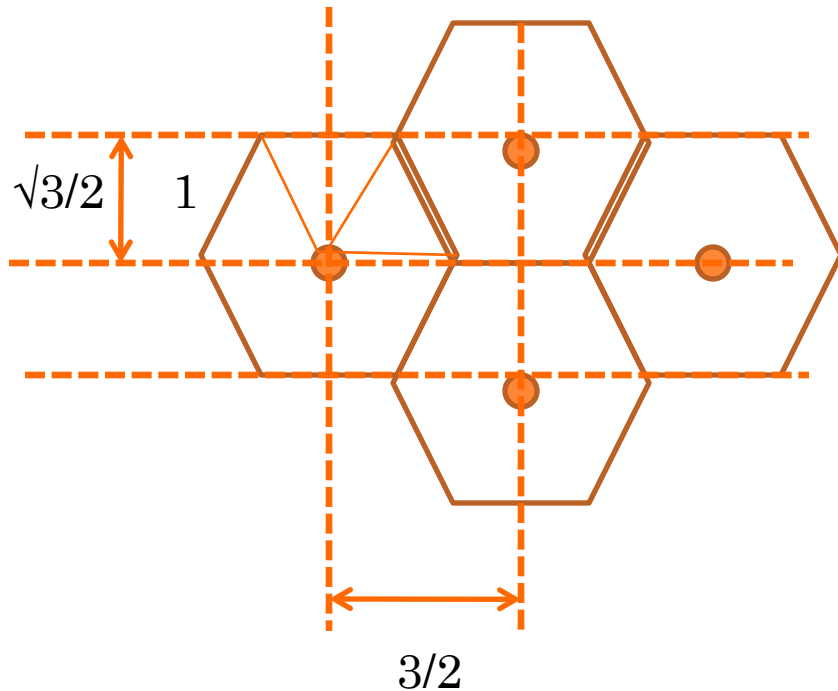
Grid cel is gelijkzijdige driehoek



Connectivity = 6

Posities middelpunten hexagons: even en oneven rijen halve grid verschoven

VERBAND TUSSEN ZIJDE HEXAGON EN ROOSTERAFSTANDEN



Zijde hexagon=1

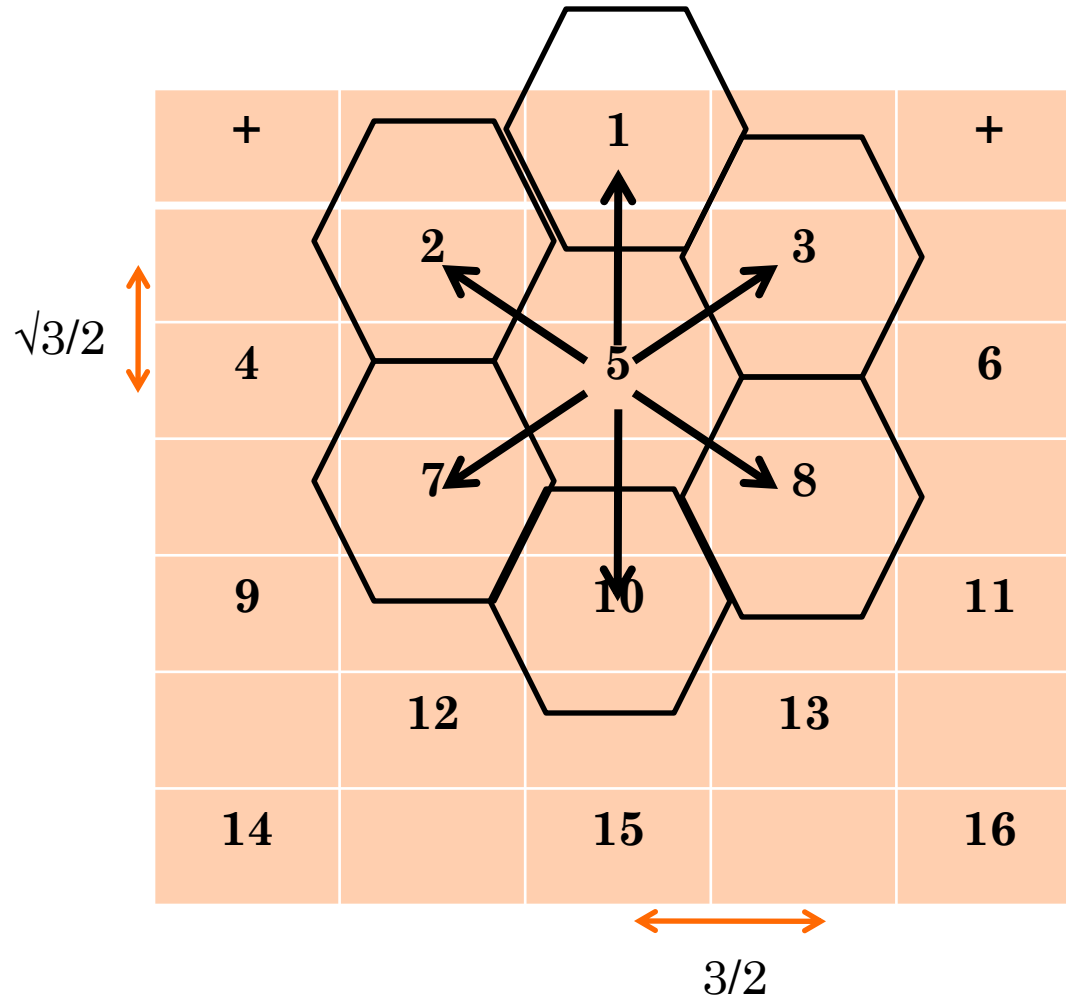
$D_x=3/2$

$D_y=\sqrt{3}/2$

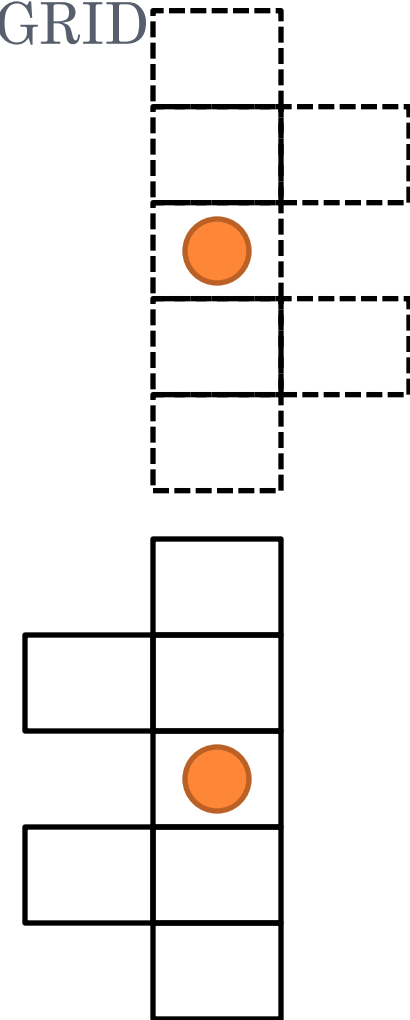
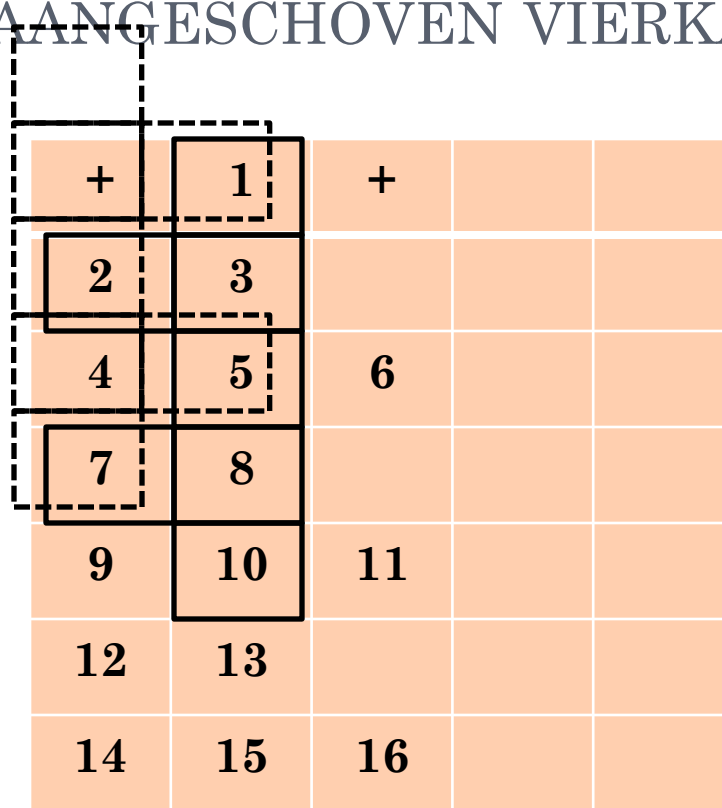
Naaste buur= $\sqrt{3}$

Oppervlak= $3\sqrt{3}/2$

REPRESENTATIE OP EEN DUBBELBREED RECHTHOEKIG GRID



REPRESENTATIE 6 HEXAGON BUREN OP EEN AANGESCHOVEN VIERKANT GRID



Afhankelijk van of de rij even/oneven is staan de tanden van het kam template naar rechts dan wel naar links

FYSIEKE LOCATIE TEGEL IN HEX-GRID

Rij 0 start met hexagon op basis

Rij 1 start met hexagon op basis naar rechts verschoven

Modulo 2 functie vanwege herhaling elke 2 rijen

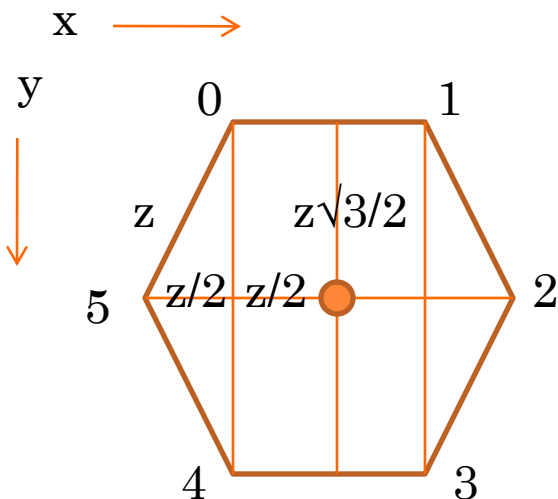
Tegel=hexagon met zijde z ; tegel $[i,j]$ met $i,j \in [0..\max]$

Zwaartepunt tegel $[0,0]$: $y_z = \sqrt{3}z/2$ $x_z = z$

Tegel $[i,j]$:
 $k = i \bmod 2$
 $y_z = (i+1)z\sqrt{3}/2$
 $x_z =$

$$k = 0 \quad x_z = 3jz + z = (3j+1)z$$

$$k = 1 \quad x_z = 3jz/2 + 5z/2 = (3j+5)z/2$$



Als zwaartepunt hexagon met zijde z

x_z, y_z is dan zijn coördinaten van de hoekpunten:

$$\text{Hoekpunt0} = y_z - z\sqrt{3}/2, x_z - z/2$$

$$\text{Hoekpunt1} = y_z - z\sqrt{3}/2, x_z + z/2$$

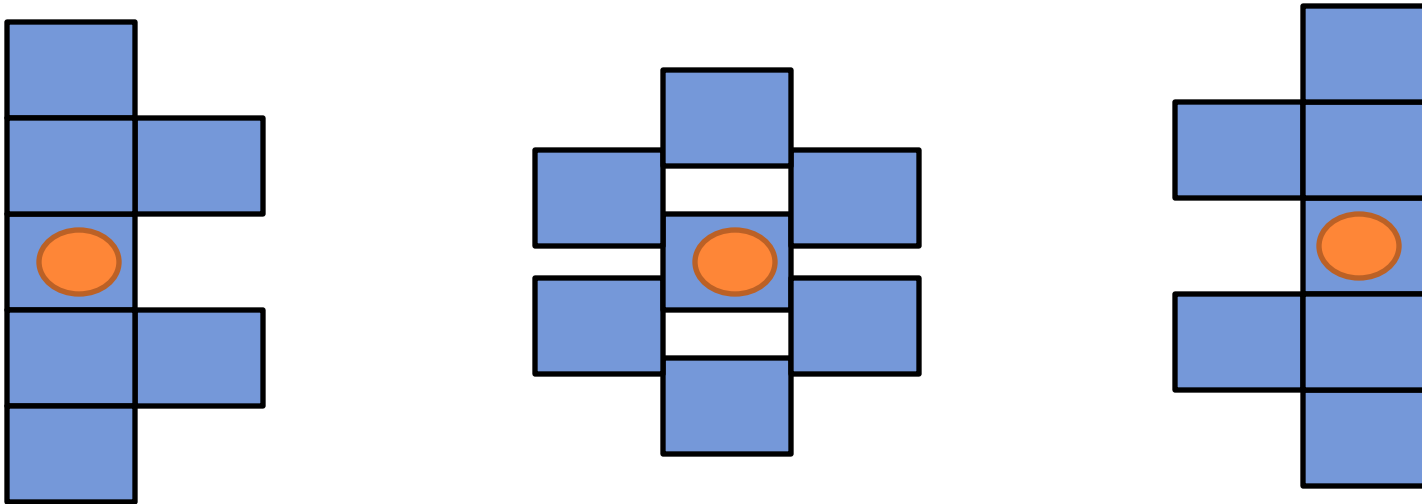
$$\text{Hoekpunt2} = y_z, x_z + z$$

$$\text{Hoekpunt3} = y_z + z\sqrt{3}/2, x_z + z/2$$

$$\text{Hoekpunt4} = y_z + z\sqrt{3}/2, x_z - z/2$$

$$\text{Hoekpunt5} = y_z, x_z - z$$

6-VERBONDEN BUREN OP HEXAGONAAL EN VIERKANT GRID



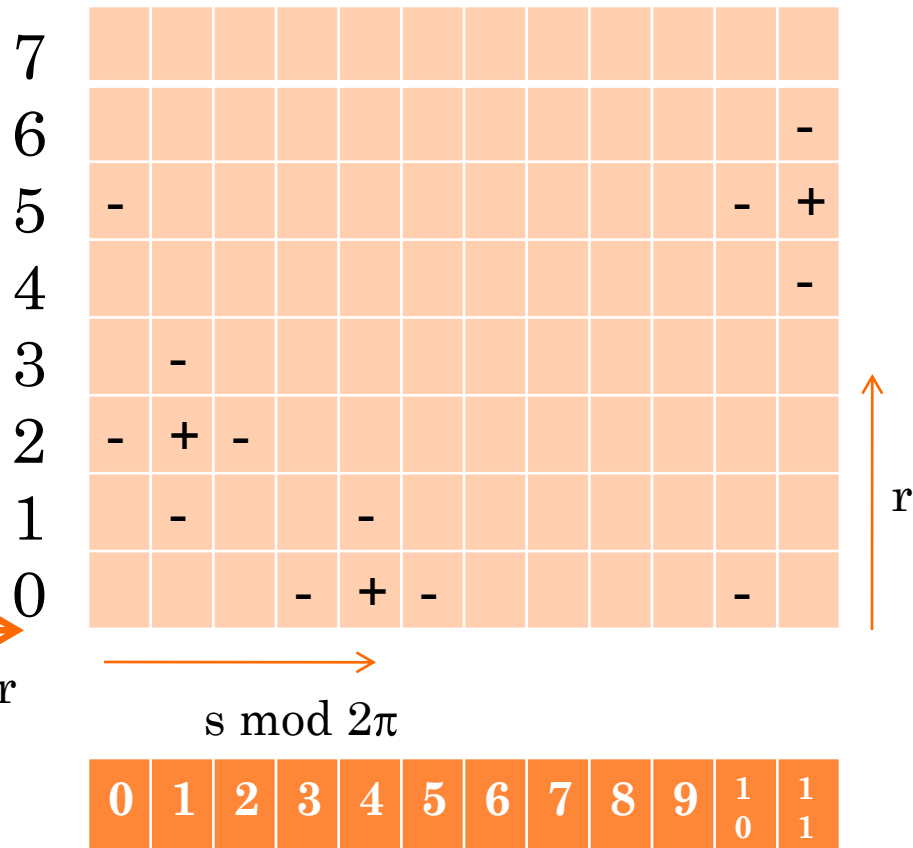
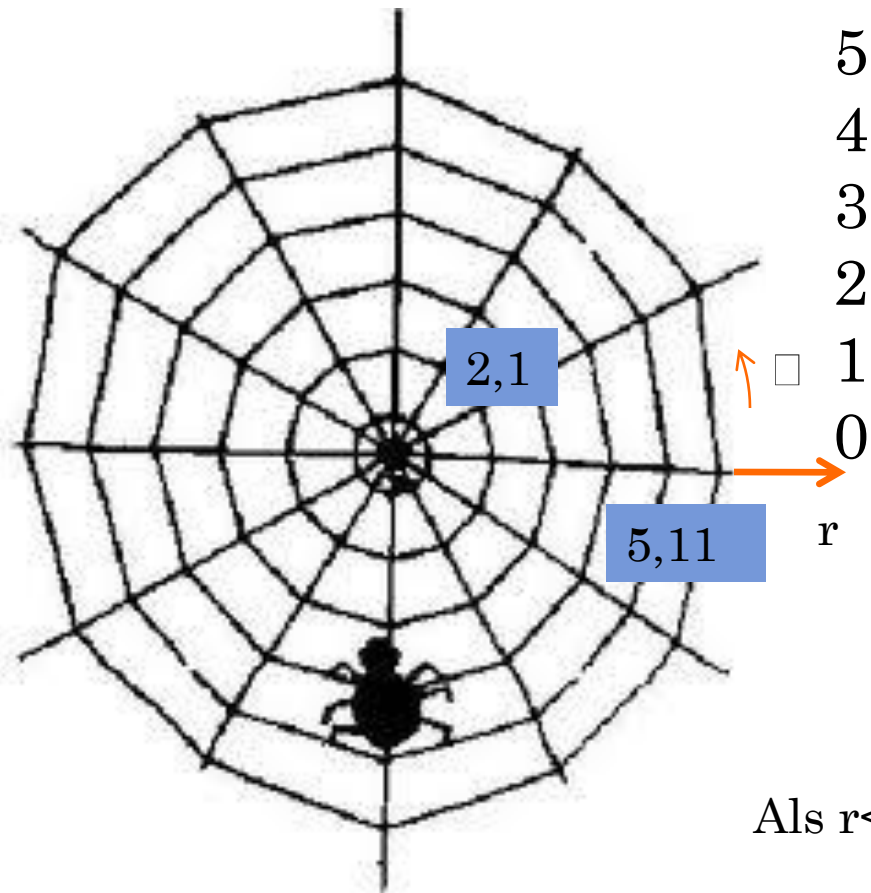
Naaste buren van \bullet (i,j) bij kamR:
 $i-1,j$ $i-1,j+1$ $i-2,j$ $i+1,j$ $i+1,j+1$ $i+2,j$

Naaste buren van \bullet (i,j) bij kamL:
 $i-1,j$ $i-1,j-1$ $i-2,j$ $i+1,j$ $i+1,j-1$ $i+2,j$

Afhankelijk van of de speelcel op een oneven dan wel even rij geregistreerd staat zijn z'n 6-verbonden bureen middels de kam templates direct te vinden

EEN GRID VOOR POOLCOORDINATEN

Naaste buren op
sectorenstructuur

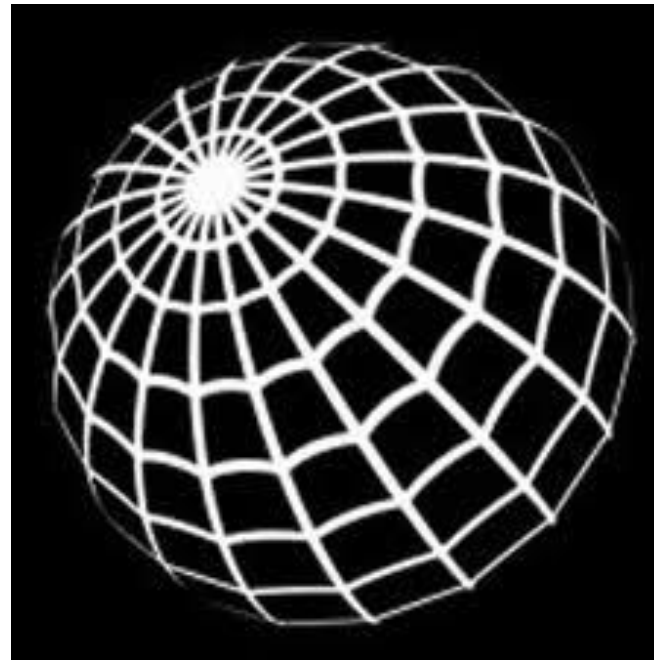
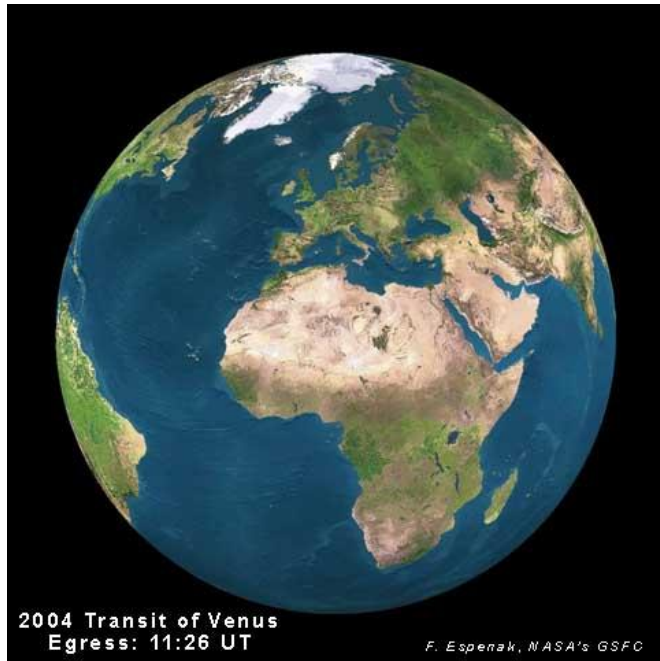


Als $r < 0 \rightarrow r = |r| - 1, s = (s+6) \bmod 12$

Toroidale graaf in s-richting

geen negatieve r sectoren!

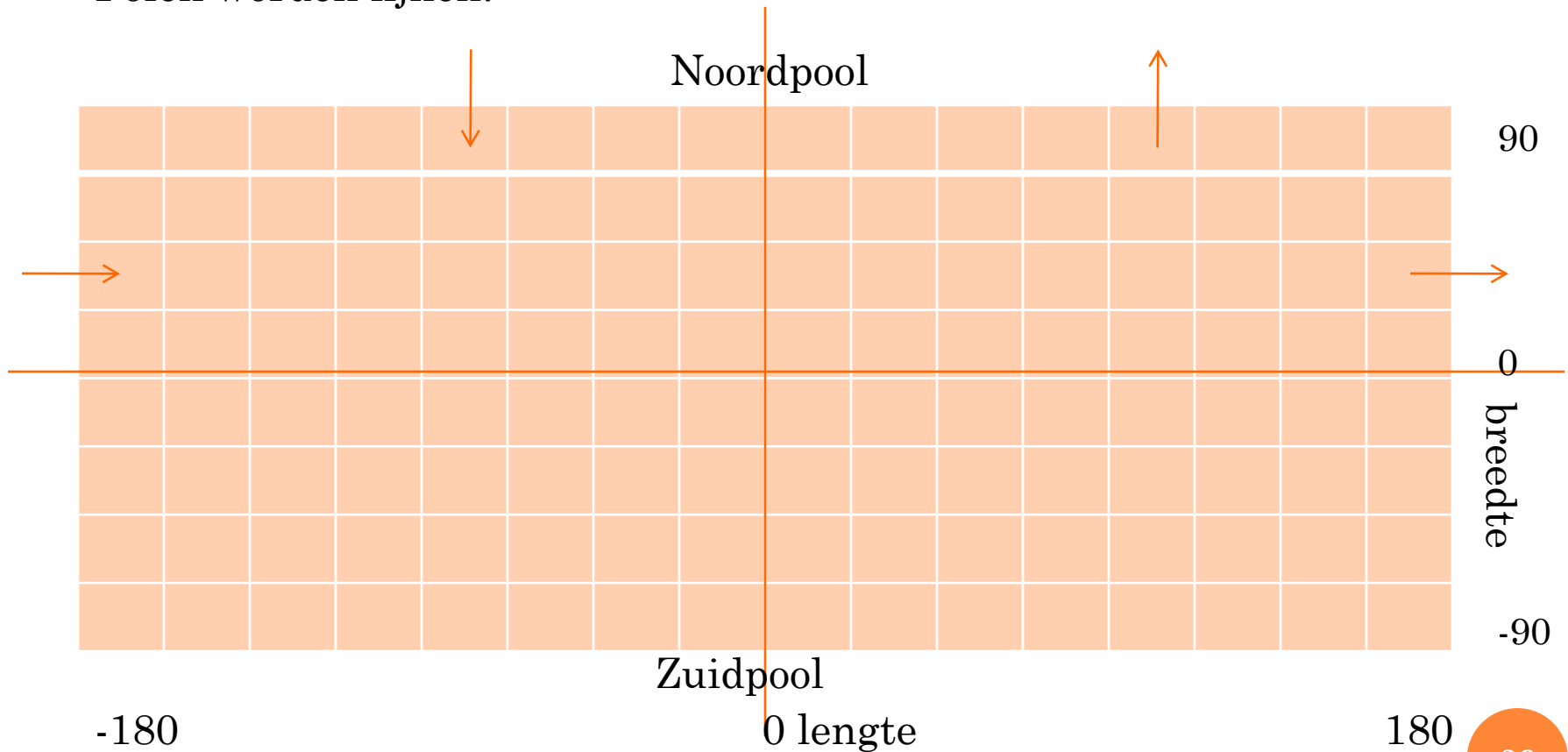
EEN GRID VOOR GEOGRAFISCHE COORDINATEN



Toroidale graaf van lengte- en breedtegraad
Lengte $[-180..180]$, breedte $[-90..90]$

BOLOPPERVLAK MET LENGTE- EN BREEDTEGRAAD

Polen worden lijnen!

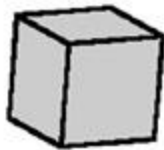


Toroidale graaf in beide richtingen

Nadeel: deze cellen zijn qua oppervlakte heel ongelijk!!

REGELMATIGE BELEGGINGEN VAN EEN BUITENOPPERVLAK

- 5 platonische vormen voor veelvlak- en boloppervlak



○ Tetraheder

hexadron

octaheder

dodecaheder

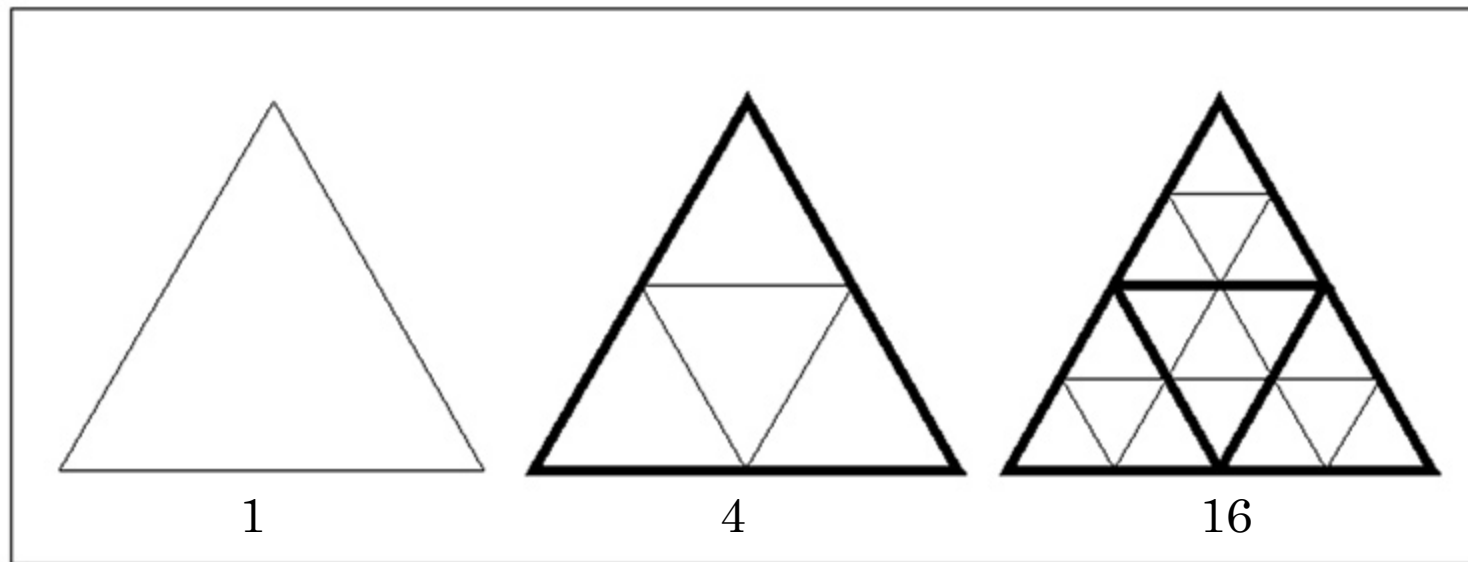
isocaheder



Mogelijk uitgangspunt verdeling
gelijke gekromde driehoeken

VERFIJNING VAN EEN DRIEHOEKSBELEGGING

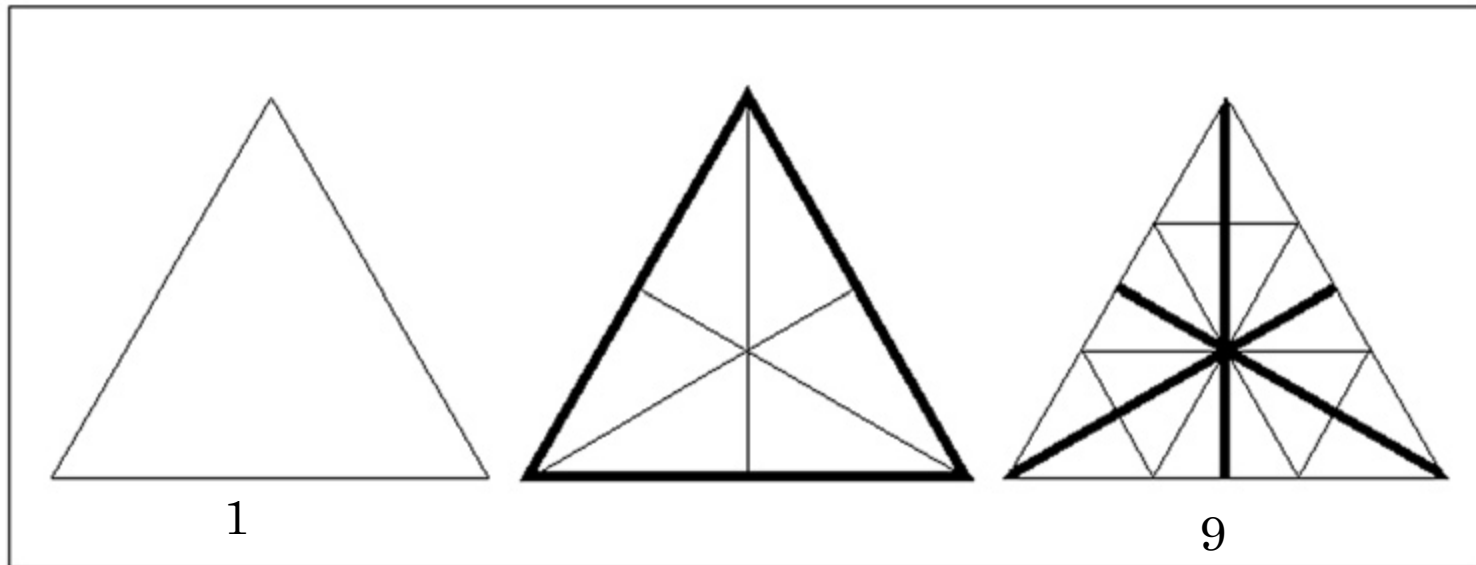
- Door middens van zijden te verbinden



- Dit recept kan naar believen herhaald worden
- Zo blijft ook de hogere resolutie een beschrijving van gelijke gebogen driehoeksoppervlakken

ALTERNATIEVE VERFIJNING Δ

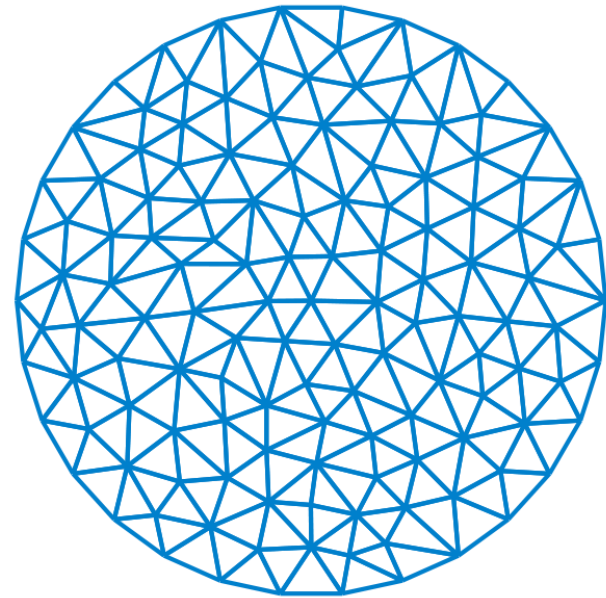
- Via hoogte/zwaartelijnen



EEN DRIEHOEKSBELEGGING VAN HET AARDOPPERVLAK

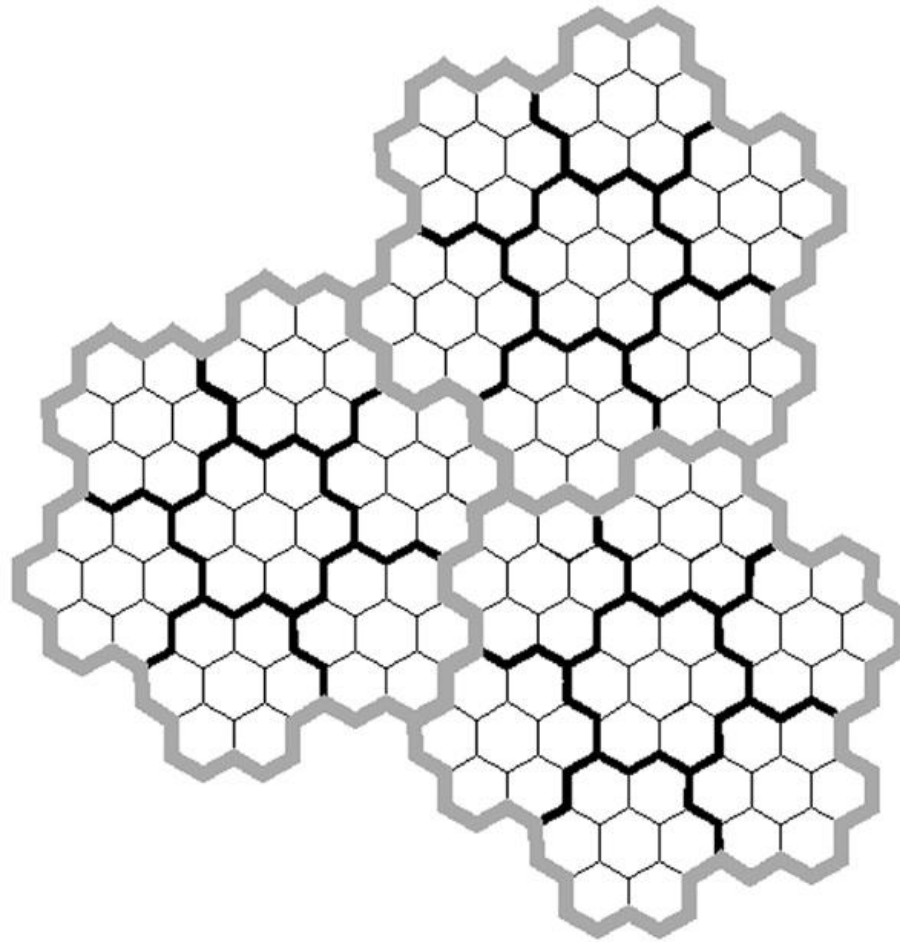


The worldwide satellite triangulation camera station network.
Courtesy NOAA



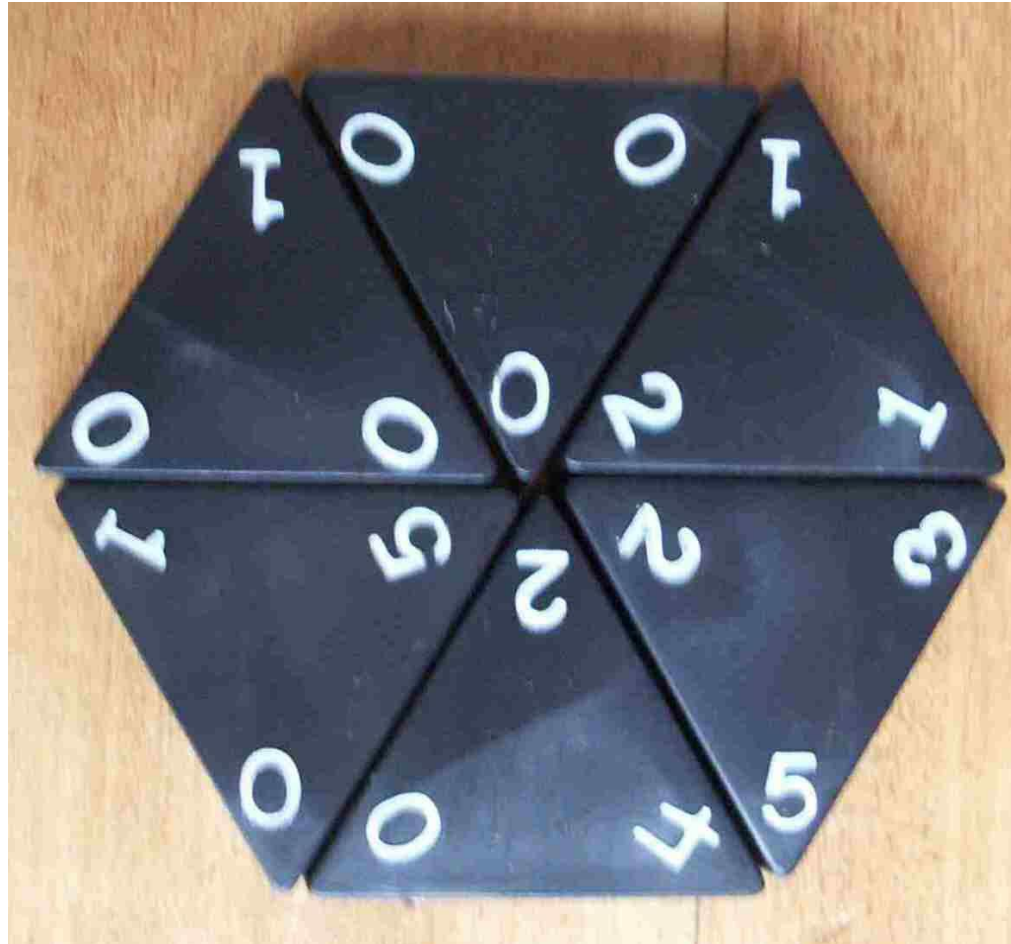
Door rotaties tracht men b.v. alle knooppunten zoveel mogelijk buiten de landmassa's te laten vallen en/of met knooppunten uit de buurt van steden te blijven

AGGREGATIE VAN HEXAGONALE CELLEN NAAR HOGER NIVEAU



7 naar 1

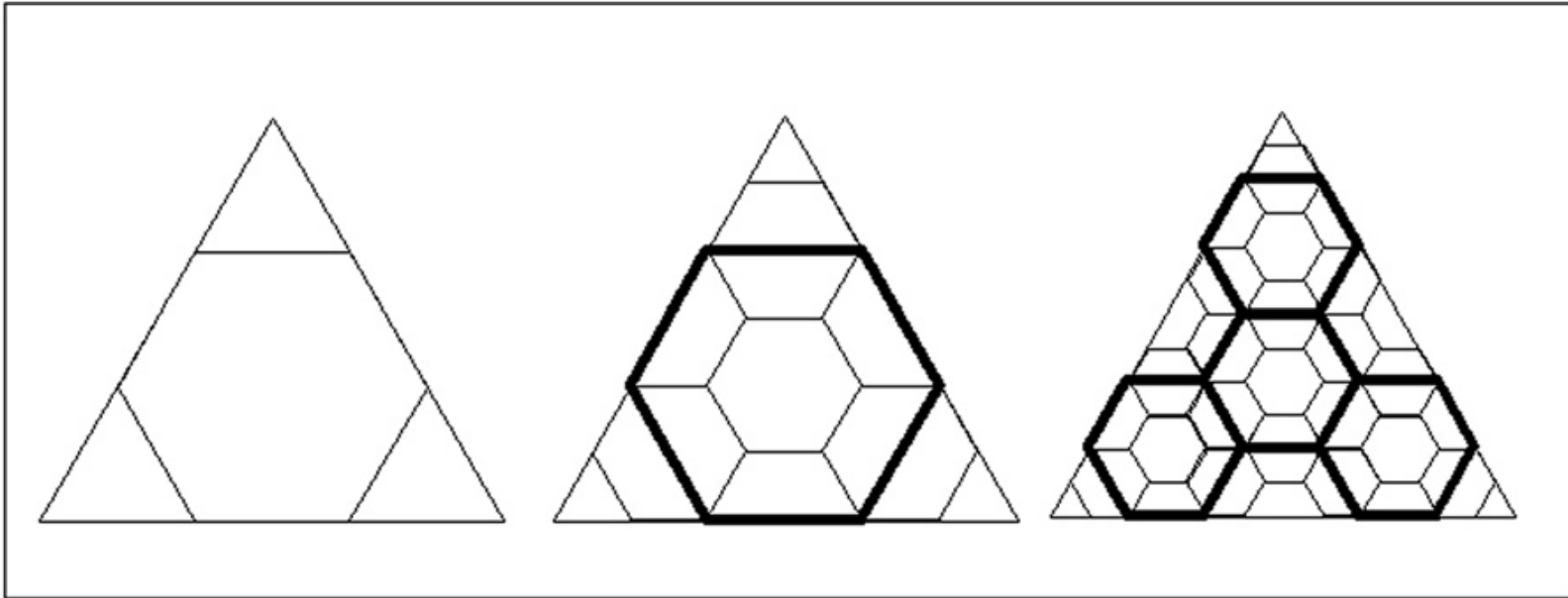
AGGREGATIE VAN HEXAGON UIT DRIEHOEKSBELEGGING



uit een hexagonale belegging kan altijd een driehoeksbelegging gemaakt worden maar omgekeerd?

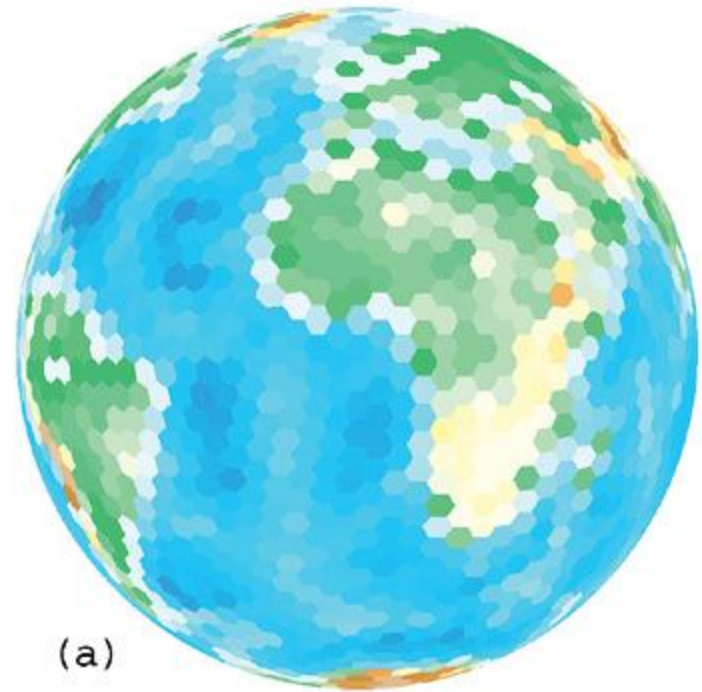
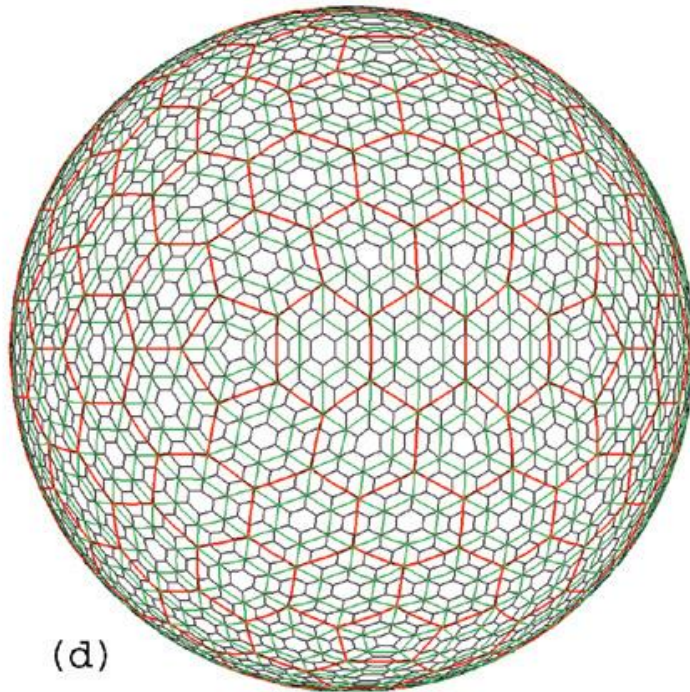
OPDEELSCHEMA VOOR DRIEHOEKSBELEGGING NAAR HEXAGONALE BELEGGING

- Via driedeling zijdes naar 1.5 hexagon/driehoek



GEODESIC DISCRETE GLOBAL GRID SYSTEMS

KEVIN SAHR, DENIS WHITE, AND A. JON KIMERLING



Lokale eigenschap hier hoogte per hexagon gemiddeld en vertaald in celkleur (blauw is onder zeenivo)

SAMENVATTING REGELMATIGE (OPPER)VLAKVERDELING

- Bomen niet efficient voor snel $O(1)$ ophalen naaste-buur informatie
- Vierkante matrix voor bipartite graaf kruisverbindingen verticale en horizontale cellen
- Ook regelmatige driehoeken en zeshoeken passen in vierkante matrix opzet met aanpassing naaste buuromgeving (L- en Kam-templates)
- Met speciale dank aan:
- Geodesic Discrete Global Grid Systems
Kevin Sahr, Denis White, and A. Jon Kimerling waar een aantal afbeeldingen uit gebruikt zijn.