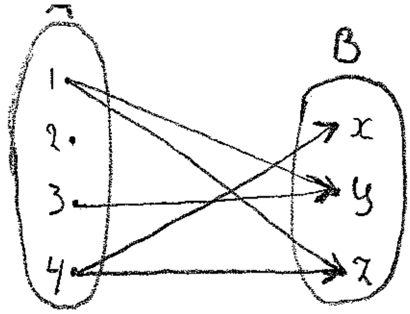
15) a.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b.



c. $R^{-1} = \{(y,1), (z,1), (y,3), (x,4), (z,4)\}$

d. $D = \{1,3,4\}$, $R = \{x,y,z\}$

e. Inj: $f(a) = f(b) \leftrightarrow a = b$, $(1,y)$ en $(3,y)$ spreekt dit tegen.
Surj: $Ber(R) = B$, ja. Tot: $Dom(R) = A$, nee (2) spreekt dit tegen. Func: nee.

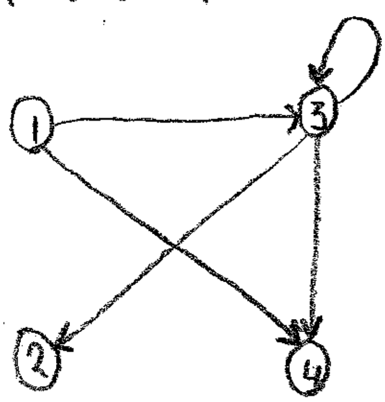
16) a.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. $D = \{1,3\}$, $R = \{2,3,4\}$

c. $R^{-1} = \{(3,1), (4,1), (2,3), (3,3), (4,3)\}$

d.



e. $R \circ R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

f. $R^{-1} \circ R = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4),$
$(4,2), (4,3), (4,4)\}$

$\cancel{R \circ R^{-1} = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}}$

$(R \circ R)^{-1} = \{(2,1), (3,1), (4,1), (2,3), (3,3), (4,3)\}$

17) a. Reflexiviteit: als $a \in A$, dan $(a,a) \in R$

1. nee, $x \not< x$
2. ja, xx is een kwadraat (foutje Schaum)
3. nee, $x+x$ hoeft geen 10 te zijn.
4. nee, $5x$ hoeft geen 10 te zijn.

b. Symmetrie: als $(a,b) \in R$, dan $(b,a) \in R$

1. nee, als $x < y$, dan $y \not< x$.
2. ja, als $(x,y) \in R$, dan $(y,x) \in R$ want $\cdot$ is commutatief.
3. ja, $+$ is commutatief.
4. nee, $x=6$, $y=1$ geeft een tegenvoorbeeld.

c. Antisymmetrie: als $(a,b) \in R$ en $a \neq b$ dan $(b,a) \notin R$.

1. ja, $x<y \Rightarrow y \not< x$.
2. nee, $x=2$, $y=8$ geeft een tegenvoorbeeld.
3. nee, $x=9$, $y=1$ geeft een tegenvoorbeeld.
4. ja, $y=1 \Rightarrow x=6$ $\quad R=\{(2,2),(6,1)\}$
   $y=2 \Rightarrow x=2$

d. Transitiviteit: als $(a,b) \in R$ en $(b,c) \in R$, dan $(a,c) \in R$

1. ja, als $x<y$ en $y<z$, dan $x<z$.
2. ja, $ab=x^2$, $bc=y^2$; $ac = \frac{x^2}{b} \cdot \frac{y^2}{b} = \frac{x^2y^2}{b^2} = \left(\frac{xy}{b}\right)^2$; dit is geen 'echte' breuk. $\sqrt{ac}$ kan geen breuk zijn.
3. nee, $x=1 \Rightarrow y=9$, $x=9 \Rightarrow y=1$, maar $(1,1) \notin R$.
4. ja, want er zijn geen paren (a,b), (b,c) (flauw).

e. $R^2 = R \circ R$

a. $x<y<z \Rightarrow x+1<z$.

b. $\rightarrow$ Omdat R transitief is, geldt dat $R^2 \subseteq R$,
$\leftarrow$ Omdat R reflexief is, geldt dat $id \subseteq R$,
Nu geldt dat $R = R \circ Id \subseteq R^2$
Dus $R^2 = R$.

c. $x+y=10$, $y+z=10$; $x=10-y$, $z=10-y$; $x=z$ met $\underset{z}{x} \in \{1,\dots 9\}$

d. $R^2 = \{(2,2)\}$.

18) a. Als R, S symmetrish:

$R \cap S$ ook: ja, als $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$, dan $(x,y) \in R \cap S$
$(x,y) \in S \Rightarrow (y,x) \in S$ $(y,x) \in R \cap S$

$R \cup S$ ook: ja, zelfde redenering.

b. Als R, S reflexief:

$R \cap S$ ook: ja, als $(x,x) \in R$ en $(x,x) \in S$, dan $(x,x) \in R \cap S$

$R \cup S$ ook: ja, zelfde redenering.

c. Als R, S transitief:

$R \cap S$ ook: ja, als $(x,y) \in R$ en $(y,z) \in R$, dan $(x,z) \in R$, dus $(x,z) \in R \cap S$
$(x,y) \in S$ en $(y,z) \in S$, dan $(x,z) \in S$

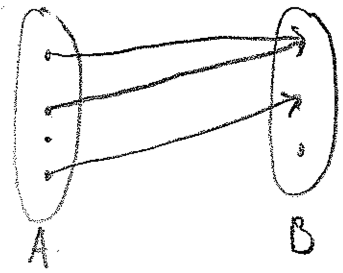
$R \cup S$ ook: nee, tegenvoorbeeld: $R = \{(1,2)\}$, $S = \{(2,3)\}$

d. Als R, S antisymmetrisch:

$R \cap S$ ook: ja, als $(x,y) \in R$ en $x \neq y$, dan $(x,y) \in R \cap S$ ((y,x) komt niet voor
$(x,y) \in S$ want $(y,x) \notin R$
$(y,x) \notin S$)

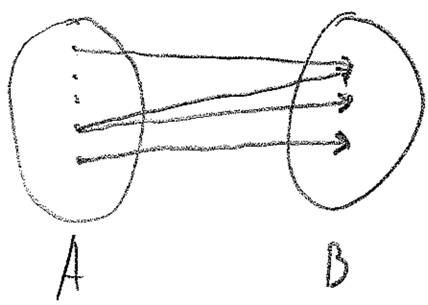
$R \cup S$ ook: nee, tegenvoorbeeld: $R = \{(1,2)\}$, $S = \{(2,1)\}$

19) a. Functioneel: als xRy en xRz, dan $y=z$.



→ Als we een tak (de verkeerde kant op) volgen van B naar A, dan is er maar 1 weg terug. Omdat niet alle elementen uit B gebruikt hoeven te worden, geldt $R^{-1} \circ R \subseteq Id$.
← Oefening voor thuis.

b. Surjectief: $Ber(R) = B$



→ Alle elementen uit B hebben een binnenkomende tak, die kunnen we (de verkeerde kant op) volgen en weer terug, maar omdat elementen uit A meerdere beelden mogen hebben kan je soms ook een andere tak terug kiezen, dus $Id \subseteq R^{-1} \circ R$.
← Oefening voor thuis.