6.1)

Reflexief : $aRa \quad \forall a \in A$

Irreflexief : $a \not R a \quad \forall a \in A$

Symmetrisch : $aRb \rightarrow bRa \quad \forall a,b \in A$

Antisymmetrisch : $aRb \wedge bRa \rightarrow a=b \quad \forall a,b \in A$

Transitief : $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc \quad \forall a,b,c \in A$

a. R: ja, x is een deler van zichzelf.

I: nee, $(R \Rightarrow \neg I)$.

S: nee, $3|6$ maar $6 \nmid 3$.

A: ja, als $x|y$ en $y|x$, dan $x=y$, want $x \leq y$ en $y \leq x$.

T: ja, als $x|y$ en $y|z$, dan $x|z$, want $y = ax$

$z = by = bax$

b. R: nee, $x \neq 2x$ in $\mathbb{N}^+$

I: ja, alleen $0 \cdot 2 = 0$, maar $0 \notin \mathbb{N}^+$

S: nee, als $x = 2y$, dan $y \neq 2x$

A: ja, (maar alleen omdat $aRb \wedge bRa$ niet geldt).

T: nee, als $x=2y$ en $y = 2z$, dan is $x = 4z$.

c: R: ja, $x^2 \geq x$.

I: nee, $(R \Rightarrow \neg I)$

S: nee, $2^2 \geq 1$, maar $1^2 \ngeq 2$

A: ja, dit geldt alleen voor 1.

T: ja, als $x^2 \geq y$ en $y^2 \geq z$, dan is $x^2 \geq z$.

6.2) $ad = bc$ Equivalentie: Reflexief, Symmetrisch en Transitief.

$d = \frac{bc}{d}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ is waar omdat we in $\mathbb{N}^+$ werken.

R: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

S: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

T: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f}$

6.3) 2000 en 2006 zijn schrikkeljaren. Het aantal dagen sinds 1-1-'00 is:

$$\underbrace{16 \cdot 365}_{\#\text{dagen in 16 jaar}} + \underset{\uparrow\ \text{schrikkeldagen}}{4} + \underset{\uparrow\ \text{jan.}}{31} + \underset{\uparrow\ \text{feb.}}{29} \equiv 2 \cdot 1 + 4 + 3 + 1 \equiv 3 \pmod 7$$

1-1-'00 was een zaterdag, het antwoord is dus maandag.
(dag 1) (dag 3)

64) $c_k \dots c_1 c_0$ Is een representatie voor de som:

$$\sum_{i=0}^{k} c_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{k} c_i (-1)^i \pmod{11}$$ vanwege de stelling $\left.\begin{matrix} a \equiv a' \\ b \equiv b' \end{matrix}\right\} \Rightarrow ab \equiv a'b'$

óf met inductie:
hyp: $10^n \equiv (-1)^n$
bas: $10^0 = 1 = (-1)^0$
ind: $10^{n+1} = 10^n \cdot 10$
$= (-1)^n \cdot -1$
$= (-1)^{n+1}$

65)

$\bar{x}$	$\bar{y}$
$\bar{0}$	–
$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{3}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$

$\bar{x}$	$\bar{y}$
$\bar{0}$	–
$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	–
$\bar{3}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	–
$\bar{5}$	–
$\bar{6}$	–
$\bar{7}$	$\bar{3}$
$\bar{8}$	–
$\bar{9}$	$\bar{9}$

$\bar{x}$ is inverteerbaar (mod n) als $\bar{x}$ en n geen gemeenschappelijke delers hebben.

66) a.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

b. $\bar{1}$ en $\bar{3}$ (zie tabel) zijn hun eigen inversen.

c.

$\bar{x}$	$\bar{x}^2$	$\bar{x}^4$
0	0	0
1	1	1
2	0	0
3	1	1 $\leftarrow 3^4 = 3^2 \cdot 3^2 = 81 \equiv 1 \pmod 4$

d. $x^4 - x^2$ is deelbaar door 4 als $x^4 \equiv x^2 \pmod 4$, dan moet $\overline{x^4} = \overline{x^2}$ en dat is gelijk aan $\bar{x}^4 = \bar{x}^2$, hetgeen in c. beweren is.

óf: $x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)$.
als x even, dan bevat x^2 een factor 4.
als x oneven, dan bevat $x-1$ en $x+1$ een factor 2.

67) a. $\bar{1}$: $(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$

$\bar{2}$: $(\bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \bar{1})$

$\bar{3}$: $(\bar{3}, \bar{9}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$

$\bar{4}$: $(\bar{4}, \bar{3}, \overline{12}, \bar{1}, \bar{1})$

enz.

b. $100^{100} = 100^{96} \cdot 100^{4}$

$\equiv (100^{12})^{8} \cdot 100^{4}$

$\equiv 1^{8} \cdot 100^{4}$ (elke 12e macht levert 1 volgens a).

$\equiv 9^{4}$ $\quad$ ($100 \equiv 9 \pmod{13}$)

$= 81^{2}$

$\equiv 3^{2}$

$= 9$.

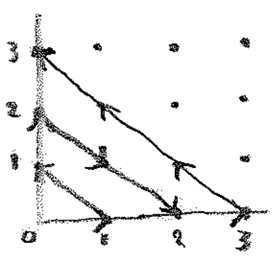
$1000^{1000} \equiv 1000^{4}$ $\quad$ ($1000^{1000} = 1000^{996} \cdot 1000^{4}$, $1000^{996} = (1000^{12})^{83}$)

$\equiv (-1)^{4}$

$= 1$

totaal geeft dat $9+1=10$.

68) a.



enz.

b. $\Sigma^{*} = \bigcup_{n\geq 0} \Sigma^{n} = \Sigma^{0} \cup \Sigma^{1} \cup \cdots$

met Σ^{i} eindig en alle woorden in Σ^{i} zijn van lengte i. ($\lambda \notin \Sigma$)

dus eerst Σ^{0} opsommen, dan Σ^{1}, enz.

c. Stel V_n de verzameling van alle rijtjes met lengte $\leq n$, waarbij elk element in het interval $[-n, n]$ ligt.

Elke V_n is eindig en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ is de verzameling eindige rijtjes.

Een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen is aftelbaar.

69) a. $\forall a \in A$ is er een uniek element $n \in \mathbb{N}$, A is dus op zijn hoogst gelijkmachtig met $\mathbb{N}$. (injectief: $f(x) = f(y) \to x = y$)

óf Elk element in A krijgt een nummer, dit kunnen we hernummeren (laagste $\to$ 0, 1-na-laagste $\to$ 1, enz).
we krijgen een bijectie als A oneindig is en anders is A per definitie aftelbaar.

b. Er is een injectieve functie van de deelverzameling naar de orginele verzameling. Verder zelfde argumentatie als bij a.

70) a. Diagonalisatie: Stel A is aftelbaar. Sommeer alle elementen in willekeurige volgorde:

0111100110....
1011100110...
101111001...
011000111....
...

pak nu van het 1e rijtje het 1e getal en inverteer dat.
" 2e " 2e "

enz.

1101... in dit voorbeeld.
dit is een nieuw rijtje omdat hij minstens 1 getal met alle anderen verschilt. ↯

b. Elke taal over $\{0,1\} \subseteq \{0,1\}^*$, de verzameling van al deze deelverzamelingen is $P(\{0,1\}^*)$.
Omdat $\{0,1\}^*$ aftelbaar oneindig is, is $P(\{0,1\}^*)$ dat niet