Extra Opgaven tot hoofdstuk 2 en hoofdstuk 3

March 16, 2007

1 Opgave 1.

Controleer met behulp van waarheidstabellen de volgende redeneringen (indien onjuist, geef een tegenvoorbeeld):

a $(p \to q) \to p, q \to \neg r \models (p \to q) \to (p \to r)$

p	q	r	$\neg r$	$p \to q$	$(p \to q) \to p$	$q \to \neg r$	$p \to r$	$(p \to q) \to (p \to r)$
0	0	0	1	1	0	1		
0	0	1	0	1	0	1		
0	1	0	1	1	0	1		
0	1	1	0	1	0	0		
1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0		

We hebben een waardering gevonden die $(p \to q) \to p, q \to \neg r$ waar maakt en $(p \to q) \to p, q \to \neg r$ niet, de waardering is: $V(p) = 1, V(q) = 1, V(r) = 0$.

b $p \to \neg r \models (q \to r) \to (q \to p)$

p	q	r	$\neg r$	$p \to \neg r$	$q \to r$	$q \to p$	$(q \to r) \to (q \to p)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0			
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0			

De waardering $V(p) = 0, V(q) = 1, V(r) = 1$ maakt $p \to \neg r$ waar en $(q \to r) \to (q \to p)$ niet waar.

c $p \to (q \wedge r), q \to \neg r \models \neg p$

p	q	r	$\neg r$	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$q \to \neg r$	$\neg p$
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0

In all drie gevallen wanneer de formules $p \to (q \wedge r), q \to \neg r$ waar zijn is $\neg p$ ook waar. Dus de redenering is correct.

2 Opgave 2.

Definitie 2.3 (boek) definieërt de substitutie van de formule ϕ voor de propositieletter p in ϕ, noatie $[\psi/p]\phi$. Bewijs de substitutiestelling: voor elk tweetal valuaties V en V' met $V'(p) = V(\psi)$ en $V'(q) = V(q)$, voor elke andere propositieletter q, geldt

$$V([\psi/p]\phi) = V'(\phi)$$

Hint: bewijs dit met inductie naar de opbouw van de formule ϕ.

Substitutie Regel 2.1 *Bewijs:*
Basis geval: Stel dat $\phi = q$, dan $V([\psi/p]q) = V(q) = V'(q) = V'(\phi)$. Stel nu dat $\phi = p$, dan $V([\psi/p]p) = V(\psi) = V'(p) = V'(\phi)$. Neem nu twee formules ϕ_1 en ϕ_2 en stel dat de substitutie regel voor ze geldt. We moeten laten zien dat de regel ook geldt voor de welgevormde formules die door ϕ_1 en ϕ_2 zijn samengesteld. Eerst beschouw de negatie $\neg\phi_1$. $V([\psi/p]\neg\phi_1) = V(\neg[\psi/p]\phi_1) = 1 - V([\psi/p]\phi_1) = 1 - V'(\phi_1) = V'(\neg\phi_1)$. Neem nu een samengestelde formule $\phi_1 \wedge \phi_2$, hier geldt het volgende $V([\psi/p](\phi_1 \wedge \phi_2)) = V([\psi/p]\phi_1 \wedge [\psi/p]\phi_2)$, we kunnen volgende tabel samenstellen:

$V([\psi/p]\phi_1)$	$V([\psi/p]\phi_2)$	$V([\phi/p]\phi_1 \wedge V[\phi/p]\phi_2)$	$V'(\phi_1)$	$V'(\phi_2)$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Omdat $V([\psi/p]\phi) = V'(\phi)$ *en uit de gegeven waarheidstabel volgt dat* $V([\psi/p]\phi_1 \wedge [\psi/p]\phi_2) = V'(\phi_1 \wedge \phi_2)$, *dus* $V([\psi/p](\phi_1 \wedge \phi_2)) = V'(\phi_1 \wedge \phi_2)$. *Voor alle andere operatoren is het bewijs identiek.*

3 Opgave 3.

Als $\Sigma \not\models \phi$ impliceert $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ is consistent.

Als ϕ is niet afleidbaar uit Σ, dan betekent het, dat er een open tableau is voor $\Sigma \circ \phi$. Het is hetzelfde als een open tableau for $\Sigma, \neg\phi\circ$, en dat betekent hetzelfde als consistentie van de verzameling $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$.

Alternatieve uitwerking: Stel $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ is inconsistent, d.w.z. er is geen valuatie voor $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$. Dan volgt dat elke valuatie voor Σ, de formule ϕ waar maakt. Dus $\Sigma \models \phi$. (Contrapositie: $\Sigma \not\models \phi \rightarrow \Sigma \cup \{\neg\phi\}$ is consistent).

4 Opgave 4.

Als Σ inconsistent is dan $\Sigma \models \phi$, for elke ϕ.

Inderdaad, als $\Sigma \models \phi$ inconsistent is, dan is er geen waardering die de Σ kan waar maken, oftewel de tableau voor $\Sigma \circ$ moet sluiten. Dan moet de tableau ook sluiten voor $\Sigma \models \phi$, omdat de toevoeging van ϕ aan de rechter kant van de $\circ$ leidt tot propageren van ϕ tot elke sluitende *eind* knoop van de boom. Maar dan zal elke voorkomen van $p \underline{\circ} p$ vervangen voorden door $p \underline{\circ} p, \phi$, en dan hebben we weer een sluitende tak, en dat geld voor alle takken en voor alle ϕ's.

Alternatieve uitwerking: Stel $\Sigma \not\models \phi$, voor zekere ϕ. Volgens opgave 3 is $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ consistent. Maar dan is ook Σ consistent.

5 Opgave 5.

Bewijs de correctheid van de tableau-regels.

Sequence $\phi_1, \ldots, \phi_n \circ \psi_1, \ldots, \psi_m$ is geldig als elke valuatie voor de formules $\phi_1, \ldots, \phi_n$ ook een valuatie is voor minstens een van de formules uit $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Met $\Phi \models \Psi$ bedoelen we dat de sequent $\Phi \circ \Psi$ geldig is. De tableau regels is een correcte methode omdat de geldige sequenten in geldige sequenten worden getransformeerd.

Correctheid van de tableau-regels 5.1 *Bewijs:*
We beschouwen eerst het geval dat de tableau transformatie tot een enkele taak leidt. Neem bijvoorbeeld de volgende regel:

$$\begin{array}{c} \Phi, \neg\alpha \circ \Psi \\ | \\ | \\ \Phi \circ \alpha, \Psi \end{array}$$

Om te bewijzen de deze regel correct is moeten we laten zien dat $\Phi, \neg\alpha \models \Psi$ *dan en slechts dan als* $\Phi \models \Psi, \alpha$.
Stel dan $\Phi, \neg\alpha \models \Psi$. *Laat* V *een valuatie zijn voor* Φ, *we moeten laten zien dat* V *ook een valuatie is voor* α *of* Ψ. *Stel dat* V *maakt* α *niet waar dan* $V(\neg\alpha) = 1$, *dus* V *is een valuatie voor* Ψ.
Stel nu dat $\Phi \models \alpha, \Psi$ *en laat* V *een valuatie voor* $\Phi, \neg\alpha$ *zijn. Omdat* V *een valuatie voor* Φ *is uit* $\Phi \models \alpha, \Psi$ *volgt dat* V *een valuatie is of voor* Ψ *of voor* α, *maar we hadden aangenomen dat* $V(\neg\alpha) = 1$, *dus* $V(\alpha) = 0$, *dan moet* V *een valuatie voor* Ψ *zijn.*

Neem nu een andere transformatie regel, $\alpha \to \beta$ *rechts. We moeten bewijzen dat* $\Phi \models \alpha \to \beta, \Psi$ *dan en slechts dan* $\Phi, \alpha \models \beta, \Psi$.
Stel $\Phi \models \alpha \to \beta, \Psi$ *en laat* V *een valuatie zijn voor* Φ, α. V *is dus ook een valuatie voor* Φ. *Stel* V *maakt geen formule uit* Ψ *waar. Dan volgt uit* $\Phi \models \alpha \to \beta, \Psi$ *dat* $V(\alpha \to \beta) = 1$. *Uit* $V(\alpha) = 1$ *volgt dan* $V(\beta) = 1$. *Stel nu dat* $\Phi, \alpha \models \beta, \Psi$ *en laat* V *een valuatie zijn voor* Φ, *Stel* V *maakt geen formule uit* Ψ *waar en* $V(\alpha) = 1$. *Dan volgt uit* $\Phi, \alpha \models \beta, \Psi$ *dat* $V(\beta) = 1$, *en dus* $V(\alpha \to \beta) = 1$.

Neem nu een regel met een splitsende taak, een transformatie voor de $\vee$ *links:*

$$\begin{array}{ccc} & \Phi, \alpha \vee \beta \circ \Psi & \\ & | & \\ \hline | & & | \\ \Phi, \alpha \circ \Psi & & \Phi, \beta \circ \Psi \end{array}$$

We moeten laten zien dat $\Phi, \alpha \vee \beta \models \Psi$ *dan en slechts dan als* $\Phi, \alpha \models \Psi$ *en* $\Phi, \beta \models \Psi$.
Laat V *een valuatie zijn voor* Φ *en* α, *dan is* V *ook een valuatie voor* $\Phi, \alpha \vee \beta$ *en dan ook een valuatie voor* Ψ.
Stel nu dat $\Phi, \alpha \models \Psi$ *en* $\Phi, \beta \models \Psi$ *en* V *is een valuatie voor* $\Phi, \alpha \vee \beta$. *Dus* V *is een valuatie voor* α *of voor* β. *Stel dat* V *is een valuatie voor* α *dan uit* $\Phi, \alpha \models \Psi$ *volgt dat* V *een valuatie voor* Ψ *is en als* V *is een valuatie voor* β *dan uit* $\Phi, \beta \models \Psi$ *volgt dat* V *ook een valuatie voor* Ψ *is.*

6 Opgave 6.

Bewijs met inductie naar het aantal knopen van de tableau: de tableau voor de sequent $\Phi \circ \Psi$ is open impliceert $\Phi \not\models \Psi$ (d.w.z, de sequence $\Phi \circ \Psi$ is niet geldig.)

Open tableaus 6.1 *Basis geval: $\Phi \circ \Psi$ bestaat enkel uit atomaire proposities. Definieer $V(p) = 1$, voor $p \in \Phi$, en $V(q) = 0$, voor $q \in \Psi$. $\Phi \cap \Psi = \emptyset$, dus dit is goed gedefinieerd. Deze valuatie laat zien dat $\Phi \not\models \Psi$.*

Inductie-stap: Onderscheid de twee vormen van tableaus (zie aantekeningen en hoofdstuk 5 uit het boek).

1.

$$\begin{array}{c} \Phi \circ \Psi \\ | \\ | \\ \Phi' \circ \Psi' \\ | \\ T \end{array}$$

Deze hele tableau is open dus de subtableau

$$\begin{array}{c} \Phi' \circ \Psi' \\ | \\ T \end{array}$$

is open. De subtableau heeft een knoop minder, dus we kunnen Inductie-hypothese toepassen: $\Phi' \not\models \Psi'$ en uit correctheid van tableau-regels volgt: $\Phi \not\models \Psi$.

2.

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\Phi \circ \Psi} \\ \multicolumn{2}{c}{|} \\ \hline | & | \\ \Phi_1 \circ \Psi_1 & \Phi_2 \circ \Psi_2 \\ | & | \\ T_1 & T_2 \end{array}$$

Deze tableau voor $\Phi \circ \Psi$ is open impliceert dat een van de subtableaus open is. De subtableau heeft een knoop minder, dus we kunnen Inductie-hypothese toepassen: $\Phi_1 \not\models \Psi_1$ of $\Phi_2 \not\models \Psi_2$. Uit correctheid van tableau-regels volgt: $\Phi \not\models \Psi$.