

Opgaven tot hoofdstuk 7

March 27, 2007

1 Opgave 7.1

Beschouw het model (D, I) met $D = \langle N, >, priem \rangle$ en $I(R) = >, I(P) = priem$, en b is willekeurig. Schrijf de volledige definitie uit van $(D, I), b \models \forall x \exists y (Ryx \wedge Py)$, en ga na dat uiteindelijk een juiste bewering resulteert.

$M, b \models \forall x \exists y (Ryx \wedge Py) \Leftrightarrow$

voor alle $q \in N : M, b[x \rightarrow q] \models \exists y (Ryx \wedge Py) \Leftrightarrow$

voor alle $q \in N$ is er een $q_1 \in N : M, b[x \rightarrow q][y \rightarrow q_1] \models (Ryx \wedge Py) \Leftrightarrow$

voor alle $q \in N$ is er een $q_1 \in N : M, b[x \rightarrow q][y \rightarrow q_1] \models Ryx$ en

voor alle $q \in N$ is er een $q_1 \in N : M, b[x \rightarrow q][y \rightarrow q_1] \models Py \Leftrightarrow$

voor alle $q \in N$ is er een $q_1 \in N : q_1 > q$ en $priem(q_1)$.

2 Opgave 7.3

Zij $D = \langle P(\{1, 2, 3\}), \subseteq \rangle, I(R) = ' \subseteq '$.

a Geef een bedeling die de volgende formule waar maakt: $\forall y ((Ryx_1 \wedge Ryx_2) \rightarrow \forall z Ryx_3)$. Omdat geen enkele bedeling kan $\forall z Ryx_3$ waar maken (geen verzameling kan een deelverzameling van een lege verzameling zijn), moeten we naar een bedeling zoeken die $\forall y (Ryx_1 \wedge Ryx_2)$ onwaar maakt.

$M, b \not\models \forall y (Ryx_1 \wedge Ryx_2) \Leftrightarrow$

voor alle $q \in P(\{1, 2, 3\}) M, b[y \rightarrow q] \not\models (Ryx_1 \wedge Ryx_2)$

er is een $q \in P(\{1, 2, 3\}) M, b[y \rightarrow q] : y \not\subseteq x_1$ of

er is een $q \in P(\{1, 2, 3\}) M, b[y \rightarrow q] : y \not\subseteq x_2$.

Neem x_1 of x_2 als $\{1\}$.

b Geef een bedeling die de formule uit **a** onwaar maakt. Nu we moeten juist een bedeling vinden die $\forall y (Ryx_1 \wedge Ryx_2)$ waar maakt en $\forall z Ryx_3$ niet waar. Neem $x_1 = x_2 = \{1, 2, 3\}$. Elke verzameling uit P is deelverzameling van deze verzameling. Maar $\{1, 2, 3\}$ is niet een deelverzameling bijvoorbeeld van $\{1\}$. Klaar.

Opgave 7.4

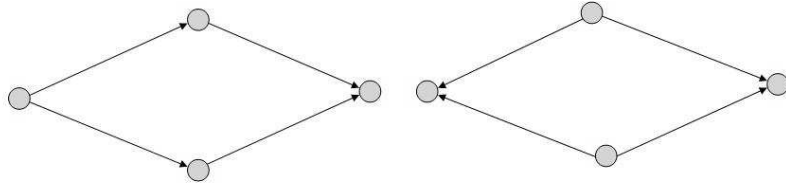


Figure 1: Opgave 7.4

c Geef een andere interpretatie voor R , zodat de volgende formule waar is op D : $\forall x \neg Rxx \wedge \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$. Neem als R 'ongelijk aan' relatie, oftewel $Rxy \Leftrightarrow x \neq y$.

3 Opgave 7.4

a Geef een zin die waar is op $\langle Q, < \rangle$, maar niet op $\langle Z, < \rangle$. Verzameling Q is de verzameling van rationale getallen. Verzameling Z is de verzameling van integers. Dus de volgende zin zal goed zijn. $\forall x \forall y (Sxy \rightarrow \exists z (Sxz \wedge Szy))$, waar S staat voor $<$.

b Geef een zin die waar is op de linker structuur, maar niet op de rechter, zie het plaatje 1. $\exists x \exists y \exists z (Rxy \wedge Ryz)$.

4 Opgave 7.6

Beschouw de modellen van de volgende formule:

$\forall x \forall y (Sx = Sy \rightarrow x = y) \wedge \forall x \exists y (x = Sy)$ Neem als model $\langle Z, S \rangle$ waar S is de opvolger functie: $I(Sn) : Sn = n + 1$. Eigenlijk, hoeft S geen functie te zijn, kijk naar het plaatje 2.

Opgave 7.6

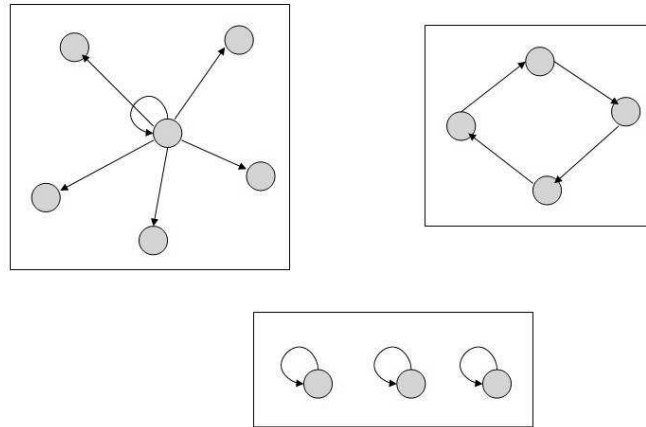


Figure 2: Opgave 7.6

5 Opgave 7.7

a De weergave van 'Er is een P zodat Q ' moet zijn: $\exists x(Px \wedge Qx)$, en niet: $\exists x(Px \rightarrow Qx)$. Waarom is het tweede fout?

Met de tweede formule zeggen ze als is er een P dan Q , oftewel het zal ook waar zijn als er helemaal geen P 's zijn. Maar met de eerste formule wordt bedoeld dat er is een object die twee eigenschappen P en Q tegelijkertijd hebt.

b De weergave van 'Alle P zijn Q ' moet zijn: $\forall x(Px \rightarrow Qx)$, en niet $\forall x(Px \wedge Qx)$. De eerste zin zegt dat alle objecten die P zijn moeten ook Q zijn. De tweede zin zegt dat alle objecten moeten zoals P als Q zijn. Dus als er een object is die niet P is dan zal de eerste zin waar zijn, maar de tweede niet waar. Maar met onze uitdrukking willen we alleen iets zeggen over de objecten die wel P zijn.

6 Opgave 7.9

Geef voor elke volgende zin een model waarin de betreffende zin niet waar is:

- i $\forall x \exists y R^2 xy \rightarrow \exists y \forall x R^2 xy$ Het is voldoende een model te vinden dat waar is voor de linker deel en niet waar is voor de rechter deel. Neem bijvoorbeeld als domein mensen, en als R houdt van, oftewel Rxy betekent dat x houdt van y . In dat model betekent de eerste deel dat alle mensen houden van iemand. De tweede deel zegt dat er is iemand van wie iedereen houdt, wat eigenlijk niet waar zijn. Of neem als het model natuurlijke getallen en als $R <$. Dan betekent de eerste deel dat voor alle natuurlijke getallen is er een groter getal. Maar de tweede zin zegt dat er is een getal dat groter is dan alle andere getallen.
- ii $\forall x (Rx \vee Sx) \rightarrow (\forall Rx \vee \forall Sx)$ Neem als domain Z , integers, en als $I(R) = '\leq 0,$ ' oftewel alle negative getallen en 0 en als $I(S) = '> 0'$ alleen positive getallen, dat zegt de eerste zin dat alle getallen uit Z zijn of positief of negatief, maar de tweede zin zegt dat alle getallen moeten of positief zijn of alle getallen moeten negatief zijn.
- iii $(\forall x Rx \rightarrow \forall x Sx) \rightarrow (Rx \rightarrow Sx)$ De eerste zin is heel erg makkelijk waar te maken het is voldoende een model te kiezen waarvoor de eigenschap R niet voor alle objecten geldt. Neem als domein N en als R de predikaat deelbaar door twee. Dan zal de eerste zin altijd waar zijn. Neem als S predikaat priem dan is de tweede zin niet waar want 4 is deelbaar door 2 maar niet priem is.

7 Opgave 7.10

Bepaal, indien mogelijk, voor elk van de volgende paren modellen M en N een zin ϕ , zodat $M \models \phi$ en $N \not\models \phi$:

- i $M = \langle Z, <, 0 \rangle$ en $N = \langle Z, \leq, 0 \rangle$. De volgende zin voldoet er naar $\exists x \exists y \neg (Rxy \vee Ryx)$, er is een x die is gelijk aan zichzelf.
- ii $M = \langle Z, x = y = 2, 0 \rangle$ en $N = \langle Z, x = y = 3, 0 \rangle$ Het is simpel $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow x = 2)$, allen introduceer ik hier de relatie '=', ik weet niet echter of het mag.
- iii $M = \langle R, <, 0 \rangle$ en $N = \langle R, x < y + 1, 0 \rangle$. De volgende zin zal goed zijn $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$
- iv $M = \langle Q, <, 0 \rangle$ en $N = \langle Q, x^2 < y^2, 0 \rangle$ en de zin is $\forall y \exists x (Rxy \wedge Rx0)$
- v $M = \langle Q, x + y = 1, 0 \rangle$ en $N = \langle Q, x - y = 1, 0 \rangle$ $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$
- vi $M = \langle R, x^2 + y^2 = 1, 0 \rangle$ en $N = \langle R, x^2 - y^2 = 1, 0 \rangle$ $\exists y (R0y)$