Opgaven tot hoofdstuk 6

March 15, 2007

1 Opgave 6.5

Beschouw beweringen over de natuurlijke getallen N . De eenplaatsige functieletters S staat voor successor-of opvolgerfunctie: $Sn = n + 1$.
a Welke beweringen worden uitgedrukt door de volgende formules?

i $\forall x \neg(Sx = 0)$ Opvolger van een natuurlijk getal kan nooit null zijn.

ii $\forall x(x = 0 \vee \exists y\ x = Sy)$ Een natuurlijk getal is gelijk aan null of is een opvolger van een ander getal.

iii $\forall x \exists y(x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y))$ Alle natuurlijke getallen hebben een direct opvolger.

iv $([0/x]\phi \wedge \forall x(\phi \to [Sx/x]\phi)) \to \forall x\phi$ ϕ is waar voor 0 en voor alle x geldt als ϕ is waar voor een willekeurige x dan is ϕ ook waar voor een opvolger van x en daaruit volgt dat ϕ is altijd waar.

b Schrijf de volgende beweringen met behulp van formules:

i Optellen van getallen is associatief:
$\forall x \forall y \forall z(x + (y + z) = (x + y) + z))$

ii De som van twee getallen is altijd kleiner dan hun product:
$\forall x \forall y((x + y) < (x * y))$

iii Elk even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen (Goldbach's vermoeden):
$\forall x((Ex \wedge (x > 2)) \to \exists y \exists z(x = (y + z) \wedge Py \wedge Pz))$, P staat hier voor predikaat primgetal en E staat voor de predikaat even getal. Later zal de definitie voor even en primgetal gegeven worden.
$\forall n \exists p \exists q \forall a \forall b \forall c \forall d((n > 1 \wedge a > 1 \wedge b > 1 \wedge c > 1 \wedge d > 1) \to ((p + q = 2 * n) \wedge (p \neq a * b) \wedge (q \neq c * d)))$

c Definieer met behulp van formules de volgende begrippen:

i x is even $\exists y(x = y * 2)$

ii x is een deler van y: $\exists z(x * z = y)$

iii x is een primgetal : $\neg\exists y\neg\exists z(y > 1 \wedge z > 1 \wedge x = y * z)$, een andere representatie:
$\forall y\forall z(x > 1 \wedge x = y * z \wedge ((y = x \wedge z = 1) \vee ((y = 1 \wedge z = x)))$, nog een representatie:
$\forall a\forall b((a > 1 \wedge b > 1) \rightarrow (x \neq a * b))$

2 Opgave 6.6

What zeggen de volgende formules over getallen?

i $\forall x\forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$. Er is een getal die tussen twee andere getallen ligt. Deze formule gaat niet op voor natuurlijke getallen, en wel voor rationele en reële getallen.

ii $\forall x\exists y(y * y = x)$. Elk getal heeft een wortel. Deze formule gaat voor de reële getallen op, maar niet voor natuurlijke en rationele getallen.

3 Opgave 6.7

Beschouw het domein der *mensen* met daartussen *familierelaties*. Definieër de volgende predikaten:
$Oxy \Leftrightarrow$ *x is een ouder van y.*
$Vx \Leftrightarrow$ *x x is een vrouw.*
a Schrijf met behulp van O en V als formules:

i Niemand is vader van iedereen: $\neg\exists x\forall y(Oxy \wedge \neg Vx)$.

ii Iedereen heeft een moeder: $\forall x\exists y(Oyx \wedge Vx)$.

iii Wie een dochter heeft, heeft een zoon:
$\forall x\exists y\exists z((Oxy \wedge Vy) \rightarrow (Oxz \wedge \neg Vz))$.

b Definieër met behulp van O en V de volgende predikaten:

i grootouder Gxy x is grootouder van y:
$\exists z(Oxz \wedge Ozy)$.

ii zuster Zxy: $\exists z(Ozx \wedge Ozy \wedge Vx \wedge (x \neq y))$, deze formule is nog niet correct, want ook halfzuster is daarmee gedefinieërd, het moet dus zo:
$(Vx \wedge (x \neq y) \wedge \exists z(Ozx \wedge Ozy \wedge Vz) \wedge \exists z(Ozx \wedge Ozy \wedge \neg Vz))$

iii oom Uxy, x is een oom van y:
$\exists z(Ozy \wedge \neg Vx \wedge (x \neq z) \wedge \exists m(Omz \wedge Omx \wedge Vm) \wedge \exists v(Ovz \wedge Ovx \wedge \neg Vv))$.

4 **Opgave** 6.8

a Geef weer met predikaatlogische formules:

i Er zijn minstens 2 objecten. $\exists x \exists y(x \neq y)$.

ii Er zijn precies 2 objecten. $\forall x \exists y \exists z((x = y \vee x = z) \wedge y \neq z)$.

iii Precies twee objecten zijn A's.
$\exists x \exists y(x \neq y \wedge Ax \wedge Ay \wedge \forall t(At \rightarrow (t = x \vee t = y)))$.

iv Precies 2 A's zijn B's
$\exists x \exists y(x \neq y \wedge Ax \wedge Ay \wedge Bx \wedge By \wedge \forall t((At \wedge Bt) \rightarrow (t = x \vee t = y)))$.

b De kwantor $\exists!$ wordt als volgt gedefinieërd : $\exists!\phi := \exists x \forall y([y/x]\phi \leftrightarrow y = x)$.

i Wat betekent dit?
Dat betekent dat er precies een object is.

ii Laat met een plaatje zien dat $\exists!x\exists!yRxy$ en $\exists!y\exists!xRxy$ niet altijd equivalent zijn.
Stel dat R is zo gedefinieërd : $R : \{(a, b), (b, c), (b, d)\}$, zie het plaatje 1. Bekijk nu de formule $\exists!yRxy$, alleen bij $x = a$ is deze formule correct, dan $\exists!x\exists!yRxy$ is ook waar. De formule $\exists!xRxy$, dus hier x moet unique zijn, is waar voor $y = b, c, d$, de formule $\exists!y\exists!xRxy$ is niet waar.

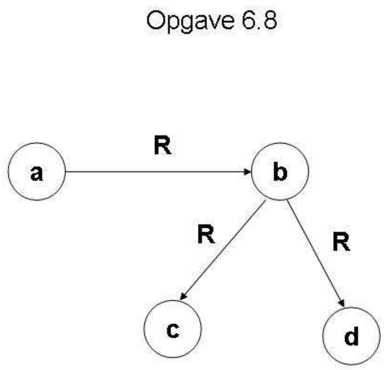

Figure 1: Opgave 6.8