Opgaven tot hoofdstuk 3

March 15, 2007

1 **Opgave** 3.1

Stel $\varphi, \psi \models \alpha$, $\beta \models \gamma$ en $\psi, \alpha, \gamma \models \chi$. Indien nu bovendien bekend wordt dat χ onwaar is, maar ψ en β waar, wat weet u dan over φ.

Als χ onwaar is betekent dat een van de aannames moet niet kloppen. Dat kan of α of γ zijn. Maar uit de aannames $\beta \models \gamma$ en β is waar volgt dat γ moet waar zijn, dus α is onwaar. Verder, omdat α kan onwaar zijn alleen als φ of ψ niet waar zijn maar ψ is waar, dus φ is niet waar.

2 **Opgave** 3.2

Toon aan: $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi \Leftrightarrow \varphi_1 \models \varphi_2 \rightarrow \psi \Leftrightarrow \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow \psi$.

Stel dat $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$ wel geldt maar $\varphi_1 \models \varphi_2 \rightarrow \psi$ niet. Dat betekent dat er bestaat een waarderong waarvoor geldt $V(\varphi_1) = 1, V(\varphi_2 \rightarrow \psi) = 0$, dat kan allen in het geval zijn als $V(\varphi_1) = 1, V(\varphi_2) = 1$ and $V(\psi) = 0$. De laatste is in tegenspraak met de aannamen. Nu de andere kant op. Als $\varphi_1 \models \varphi_2 \rightarrow \psi$ geldt maar $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$ niet, dan $V(\varphi_1) = 1, V(\varphi_2 \rightarrow \psi) = 1$ and $V(\varphi_1) = 1, V(\varphi_2) = 1, V(\psi) = 0$, maar volgens de aannamen $V(\varphi_2 \rightarrow \psi) = 1$, dus $(V(\psi) = 1)$ en dat is met tegensprak met $V(\psi) = 0$.

Je kan hetzelfde doen met de volgende formule, maar hier wil ik een andere mogelijkheid laten zien, wel met semantische tableaus. Ik moet laten zien dat als er tegenvoorbeelden zouden bestaan dan de $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$ dezelfde tegenvoorbeelden oplevert als $\models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow \psi$.

Voor de tegenvoorbeelden voor die twee formules geld het volgende:

$$\begin{aligned} V(\varphi_1) = 1, V(\varphi_2) = 1, V(\psi) = 0 \\ V((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow \psi) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Dat kan allen zijn als

$$
\begin{aligned}
V(\varphi_1) = 1, V(\varphi_2) = 1, V(\psi) = 0 \\
V(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 1, V(\psi) = 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

En de laatste levert dezelfde tegenvoorbeelden op:

$$
\begin{aligned}
V(\varphi_1) = 1, V(\varphi_2) = 1, V(\psi) = 0 \\
V(\varphi_1) = 1, V(\varphi_2) = 1, V(\psi) = 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

3 Opgave 3.3

Test met een semantisch tableau of de volgende equivalenties tautologieën zijn. Om te controleren of een formule een tautologie is moeten we laten zien dat er geen waardering bestaat die de formule onwaar kan maken, oftewel dat er geen tegenvoorbeeld is voor de tableau met een leeg rijtje aan de linkerkant.

i $(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ Tableau sluit, zie het plaatje 1

ii $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \to q) \to (p \to r))$ Tableau sluit, zie het plaatje 2

4 Opgave 3.4

a Bewijs met een tableau de zogenaamde 'Wet van Hauber', die onder bepaalde voorwaarden omkeren van implicatie toestaat:
$p_1 \to q_1, p_2 \to q_2, p_1 \vee p_2, \neg(q_1 \wedge q_2) \models (q_1 \to p_1) \wedge (q_2 \to p_2)$. Zie het plaatje 3

b Laat zien dat de volgende gevolgtrekkingen niet geldig zijn:

i $p \vee (q \wedge r)/(p \vee q) \wedge r$. Zie het plaatje 4. Er is een open taak, dat betekent dat er een waardering is die $p \vee (q \wedge r)$ waar maakt en $(p \vee q) \wedge r$ niet. Neem $V(p) = 1$ en $V(r) = 0$.

ii $(p \wedge q) \vee r/p \wedge (q \vee r)$. Zie het plaatje 4. Er is een open tak, dus er is een tegenvoorbeeld gevonden. De volgende waardering maakt $(p \wedge q) \vee r$ waar en $p \wedge (q \vee r)$ niet waar: $V(r) = 1$ en $V(p) = 0$.

5 Opgave 3.5

Geef een voorbeeld van een geldige sequent met twee bijbehorende gesloten tableaus die in aantallen knopen verschillen. (Kunt u een meest efficiënte zoekstrategie bedenken om steeds aan het kleinste gesloten tableau te komen?)

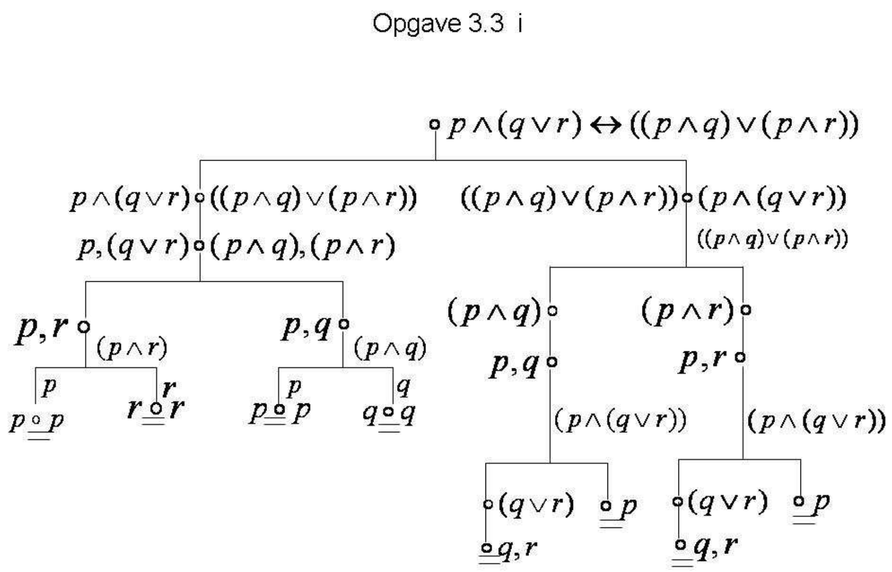

Figure 1: Opgave 3.3i

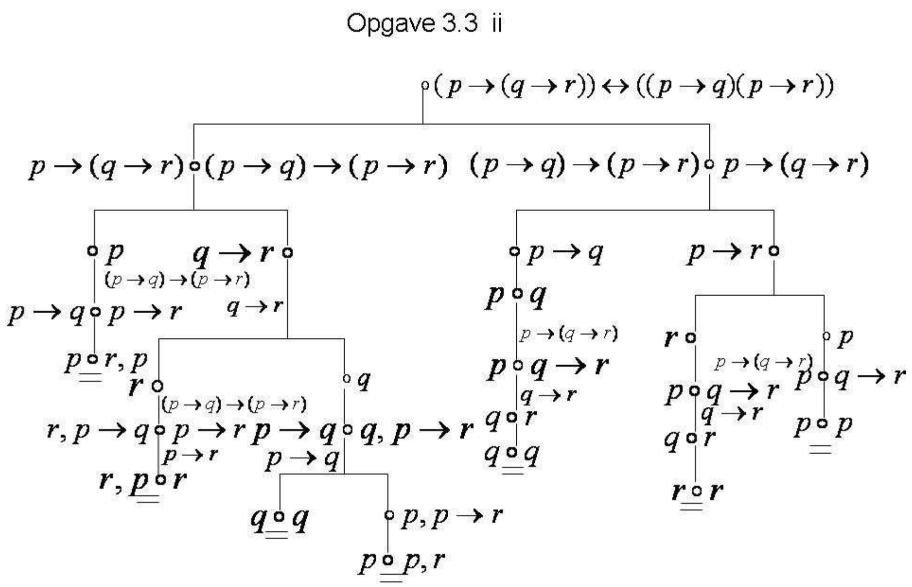

Figure 2: Opgave 3.3ii

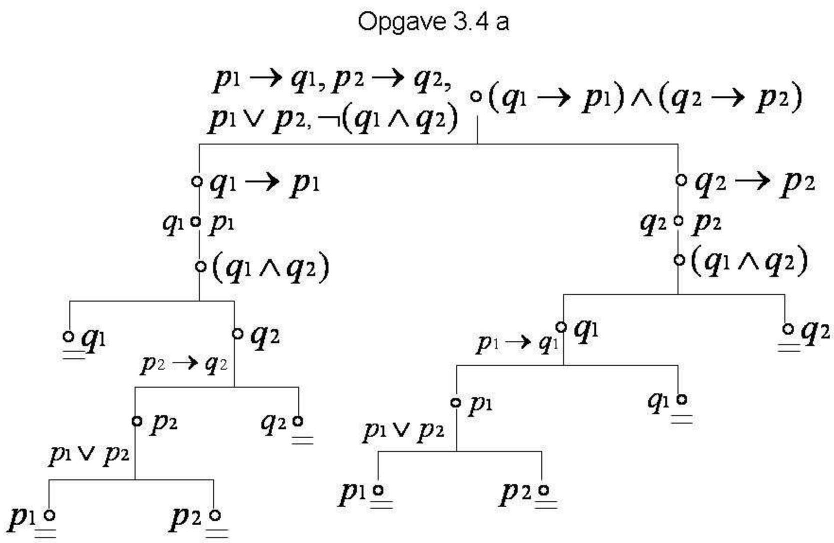

Figure 3: Opgave 3.4a

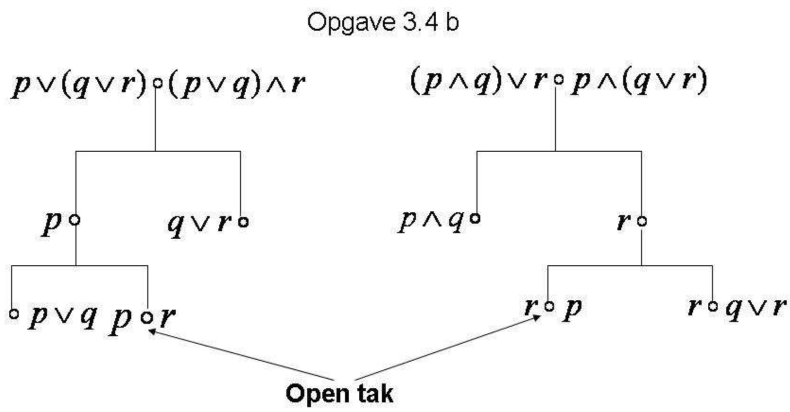

Figure 4: Opgave 3.4b

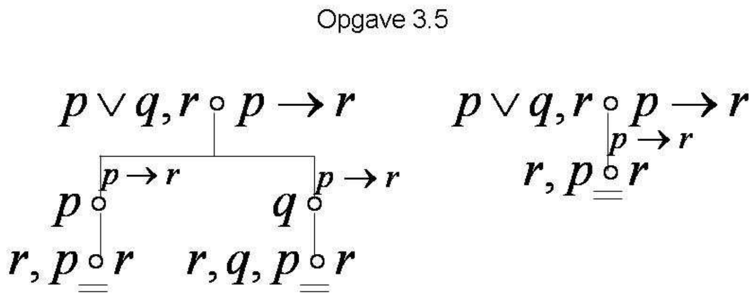

Figure 5: Opgave 3.5 Twee gesloten tableaus voor een geldige sequent.

Voor een voorbeeld zie het plaatje 5. Je ziet dat het testen van tableau met expanderen van een $p \vee q$ links regel kost twee keer zoveel stappen als het testen van het tableau als je begint met het expanderen van $p \to r$ rechts regel. In het algemeen, probeer eerst een regel te vinden die tot het voorkomen van dezelfde letter links en rechts leidt. Als die regel niet bestaat expandeer de regel die tot enkele taak leidt, anders zal je deze regel toch wel gebruiken maar dan twee keer zo vaak na de branching.