

# Proeftentamen 11-03-2009

May 13, 2009

## 1 Opgeve 1.

Geef een propositionele formule die waar is dan en slechts dan precies één van de proposities  $p, q$  en  $r$  waar is.

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r).$$

## 2 Opgave 2.

Ga na of de logische gevolgtrekking  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \models (p \rightarrow q) \rightarrow r$  geldig is door gebruik te maken van semantische tableaux. Indien mogelijk, geef een tegenvoorbeeld. Zie het plaatje 1. Het tableau is open, de tegenvoorbeeld is  $V(p) = 0, V(r) = 0$ .

## 3 Opgave 3.

Een sequent  $\Phi \circ \Psi$  is geldig, notatie  $\Phi \models \Psi$ , als elk model van de verzameling formules  $\Phi$  een formule uit  $\Psi$  waar maakt.

(a) Ga na of

- i.  $\{p \vee q\} \models \{p\}$  Nee, het is niet waar, want  $V(p) = 0, V(q) = 1$  is een tegenvoorbeeld.
- ii.  $\{p \vee q\} \models \{p, q\}$  Ja, het is waar, want om  $\{p \vee q\}$  waar te maken moeten of  $p$  of  $q$  waar zijn, dat maakt dus een van de formules uit  $\{p, q\}$  waar.
- iii.  $\{p, \neg p\} \models \emptyset$  Omdat er geen valuatie bestaat die de verzameling van de formules links waar maakt, kan er alles uit volgen, ook de lege verzameling.

(b) Stel  $\Phi \models \Psi$ . Ga na dat  $\Phi \subseteq \Phi'$  en  $\Psi \subseteq \Psi'$  dan ook  $\Phi' \models \Psi'$ . Elke valuatie  $V$  die  $\Phi'$  waar maakt maakt ook  $\Phi$  waar, uit  $\Phi \models \Psi$  volgt dat het is ook een valuatie voor  $\Psi$ . Dus deze valuatie maakt tenminste een formule  $\psi \in \Psi$  waar. Omdat  $\Psi \subseteq \Psi'$  behoort  $\psi$  ook tot  $\Psi'$ , dus  $\Psi'$  wordt ook waargemaakt met deze valuatie.

(c) Bewijs dat  $\Phi \cup \{\neg\phi\} \models \Psi$  dan en slechts dan  $\Phi \models \Psi \cup \{\phi\}$ .

Ten eerste  $\Rightarrow$ . Stel dat er is een valuatie  $V$  die  $\Phi$  waar maakt, als het ook een valuatie voor  $\{\phi\}$  is dan zijn we klaar. Als deze valuatie  $\{\phi\}$  niet

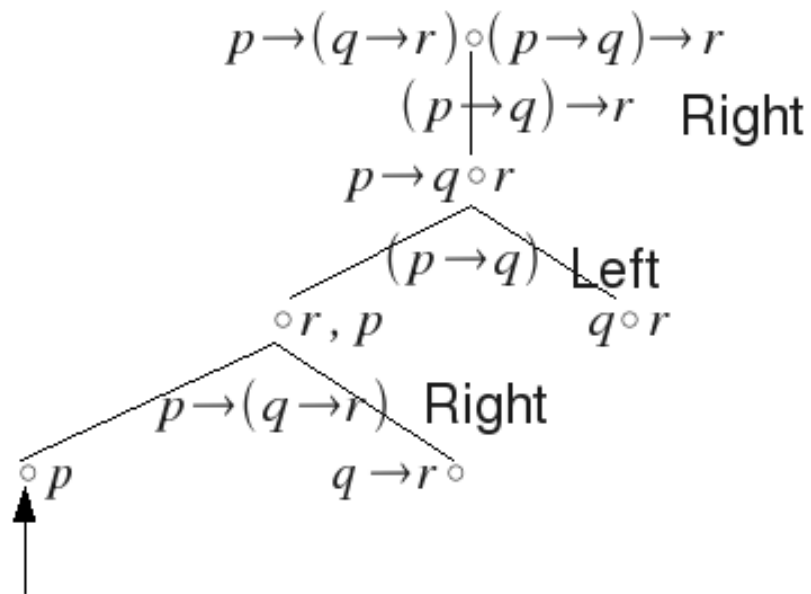


Figure 1: Opgave 2

waar maakt dan uit de aanname volgt dat het ook een valuatie voor  $\Psi$  is, oftewel een van de formules uit  $\Psi$  wordt waar gemaakt. Dan het is ook een valuatie voor  $\Psi \cup \{\phi\}$ .

Ten tweede  $\Leftarrow$ . Bij elke valuatue die  $\Phi$  waar maakt worden of  $\Psi$  of  $\{\phi\}$  waar. Als  $\{\neg\phi\}$  is waar dan moet  $\Psi$  waar zijn.