Proeftentamen Logica $30 - 03 - 2007$

April 12, 2007

1 **Opgave** 1

Construeer met behulp van een waarheidstabel een disjunctieve normaalvorm voor de formule $(p \vee q) \wedge (r \vee t)$.

p	q	r	t	$(p \vee q)$	$r \vee t$	$(p \vee q) \wedge (r \vee t)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0

Deze tabel heeft 9 modellen, en de disjunctieve normaalvorm is:
$(p \wedge q \wedge r \wedge t) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg t) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge t) \vee$
$(p \wedge \neg q \wedge r \wedge t) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg t) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge t) \vee$
$(\neg p \wedge q \wedge r \wedge t) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge t)$.

2 **Opgave** 2

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor de volgende bewering:
als $\phi \rightarrow \psi$ consistent is en ϕ is consistent, dan is ψ consistent.

Een formule is consistent als er een waardering is die de formule waar maakt. Bijvoorbeeld de formule $p \to (q \wedge \neg q)$ is consistent als $V(p) = 0$. De formule p is ook consistent want er is een waardering die p waar maakt, namelijk $V(p) = 1$. In deze voorbeeld zijn beide formules p, en $p \to (q \wedge \neg q)$ consistent, maar $(q \wedge \neg q)$ is niet consistent, want er bestaat geen waardering die de formule $(q \wedge \neg q)$ kan waar maken.
Je kan ook vanuit een andere hoek deze opgave bekijken, namelijk als de verzameling van de formules $\phi, \phi \to \psi$ consistent is dan moet natuurlijk ook ψ consistent zijn. Want elke waardering die ϕ en $\phi \to \psi$ waar maakt, maakt ook ψ waar.

ϕ	ψ	$\phi \to \psi$	$\phi, \phi \to \psi$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

3 Opgave 3

Test met behulp van een semantische tableau de geldigheid van de gevolgtrekking
$(p \to q) \to p, q \to \neg r \models (p \to q) \to (p \to r)$, zie het plaatje 1. De volgende waardering levert een tegenvoorbeeld: $V(p) = 1, V(q) = 1, V(r) = 0$. Je kan zelf nakijken dat het klopt.

4 Opgave 4

Laat zien dat de predikaat-logisch formule $\exists x \forall y (Rxy \leftrightarrow \neg Ryy)$ geen modellen heeft.

Stel dat er is een model $M = \langle D, I \rangle$, dus er is een object d_1 waarvoor geldt $\forall y (Rd_1 y \leftrightarrow \neg Ryy)$. Omdat de formule voor alle y geldt moet het ook in het bijzonder voor $y = d_1$ gelden, oftewel voor alle y in D : geldt $M, b[y \to d_1] \models Rd_1 y \leftrightarrow \neg Ryy$ en dat is gelijk aan $Rd_1 d_1 \leftrightarrow \neg Rd_1 d_1$, wat duidelijk niet waar is.

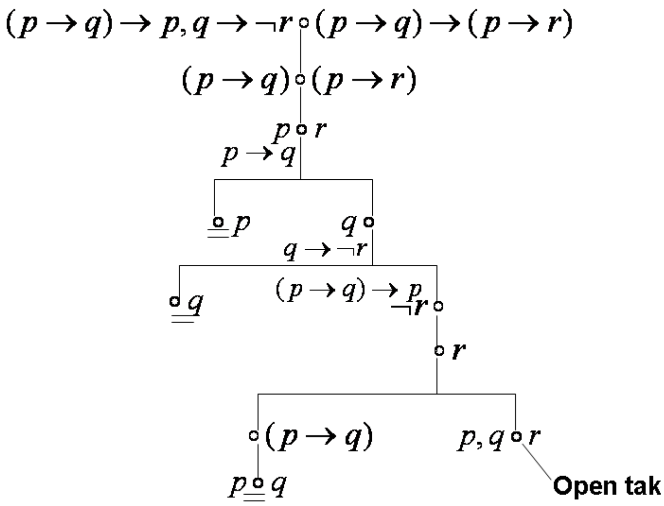

Figure 1: Tableau met een open tak