

Extra Opgaven, natuurlijke deductie

1 Uit Tentamen Logica voor Informatici, 19 december 2000

Bewijs met natuurlijke deductie, zonder bekende wetten te gebruiken:

a) $(p \wedge q) \vee r \vdash (r \rightarrow p) \rightarrow p$

1. $(p \wedge q) \vee r$ aanname waarvanuit we moeten $(r \rightarrow p) \rightarrow p$ bewijzen
2. Stel $r \rightarrow p$ aanname om p te bewijzen
3. Stel r aanname om p te bewijzen
4. p volgt uit regels 2,3 $\rightarrow E(2, 3)$
5. Stel $p \wedge q$ aanname om p te bewijzen
6. p volgt uit regel 5 $\wedge E(5)$
7. p volgt uit 2 en 1 $\vee E(1, 4, 6)$. Nu kunnen we aannames 3 en 5 intrekken
8. $(r \rightarrow p) \rightarrow p$ Nu kunnen we de aanname $(r \rightarrow p)$ intrekken $\rightarrow I(7)$

b) $\vdash (p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$.

1. Stel $(p \wedge \neg q)$ hieruit moeten we $\neg(p \rightarrow q)$ bewijzen
2. Stel $(p \rightarrow q)$ om negatie daarvan te bewijzen
3. p volgt uit 1 $\wedge E(1)$
4. q volgt uit 2 en 3 $\rightarrow E(2, 3)$
5. $\neg q$ volgt uit 1 $\wedge E(1)$
6. $\neg(p \rightarrow q)$ weerleggen van de aanname 2 wegens strijdige conclusies 4 en 5
 $\neg I(2)$
7. $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow q) \rightarrow I(6)$