Tentamen 1

May 16, 2007

1

Na de verkiezingen van 2007 doet Balkenende de volgende uitspraken:

- Het CDA komt in de regering of de PVDA komt in de regering; $C \vee P$.
- Als het CDA in de regering komt, dan ook de PVDA of de VVD; $C \rightarrow (P \vee V)$.
- Als de PVDA of de VVD in de regering komt, dan ook CDA;$(P \vee V) \rightarrow C$.
- Als de VVD in de regering komt, dan komt de PVDA er niet in; $V \rightarrow \neg P$.

Welke regeringscoalotoes zijn er volgens Balkenende mogelijk? Bepaal het antwoord op deze vraag met behulp van een waarheidstafel.

C	P	V	$C \vee P$	$P \vee V$	$C \rightarrow (P \vee V)$	$(P \vee V) \rightarrow C$	$\neg P$	$V \rightarrow \neg P$	Is Model
0	0	0	0	0	1	1	1	1	Nee
0	0	1	0	1	1	0	1	1	Nee
0	1	0	1	1	1	0	0	1	Nee
0	1	1	1	1	1	0	0	0	Nee
1	0	0	1	0	0	1	1	1	Nee
1	0	1	1	1	1	1	1	1	Ja
1	1	0	1	1	1	1	0	1	Ja
1	1	1	1	1	1	1	1	0	Nee

2

(a) Wat is een open en wat is een gesloten tableau?
Een open tableau is een tableau waarvoor een waardering bestaat die de formules links van $\circ$ waar maakt en de formules rechts niet waar.

(b) Leg uit hoe we semantisch tableau kunnen gebruiken om te testen of een propositionele formule een tautologie, een contradictie, of consistent is.

Voor een formule ϕ geldt dat als het een tautologie is dan de tableau $\circ\phi$ moet sluiten. Voor een contradictie moet er een waardering zijn die de formules links van $\circ$ waar kan maken en de formules rechts niet waar, dus de tableau moet open zijn. Als de verzameling van de formules consistent is dan is er een waardering die deze formules waar kan maken, dus de tableau moet open zijn.

3

Geef semantische tableau-regels voor het binair connectief $\phi|\psi$ dat we interpreteren als 'nog ϕ nog ψ' en gebruik deze regels om met semantische tableau te laten zien dat de volgende formule een tautologie is $((\neg p)|(\neg q)) \to (p \wedge q)$.

Eerst moeten we laten zien dat $\phi|\psi$ is equivalent met $\neg(\phi \vee \psi)$

ϕ	ψ	$\phi\|\psi$	$\phi \vee \psi$	$\neg(\phi \vee \psi)$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0

Nu kunnen we de formule $\neg(\phi\vee\psi)$ uitwerken met de tableau methode. Eerst voor $\phi|\psi\circ$

$$\begin{array}{c} \phi|\psi\circ \\ | \\ \neg(\phi \vee \psi)\circ \\ | \\ \circ\phi \vee \psi \\ | \\ \circ\phi, \psi \end{array}$$

En dan voor $\circ\phi|\psi$

$$\begin{array}{c} \circ\phi|\psi \\ | \\ \circ\neg(\phi \vee \psi) \\ | \\ \phi \vee \psi\circ \\ | \\ \begin{array}{cc} \phi\circ & \psi\circ \end{array} \end{array}$$

Om te laten zien dat $((\neg p)|(\neg q)) \to (p \wedge q)$ een tautologie is moeten we aantonen dat tableau $\circ((\neg p)|(\neg q)) \to (p \wedge q)$ sluit.

$$
\begin{array}{c}
\circ((\neg p)|(\neg q)) \to (p \wedge q) \\
| \\
(\neg p)|(\neg q) \circ p \wedge q \\
| \\
\circ \neg p, \neg q \\
| \\
\begin{array}{cc}
\hline
| & | \\
\circ p & \circ q \\
| & | \\
p \circ & q \circ \\
= & =
\end{array}
\end{array}
$$

4

Laat door middel van een semantische tableau zien dat er eindige tegenvoorbeelden zijn voor de implicatie $\forall x \exists y R(x,y) \to \exists R y(y,y)$. Geef duidelijk aan welke tableau-regels je gebruikt. Zie plaatje 1.

5

Formaliseer in de predikaatlogica de volgende bewering: 'er is geen kapper die iedereen scheert die zichzelf niet scheert', en test deze bewering met een semantische tableau.

De volgende vertaling lijkt me logisch, maar ik ben er niet zeker van: $\neg \exists x \forall y(\neg S(y,y) \to S(x,y))$, waar $S(x,y)$ betekent x scheert y. De variant $\neg \exists x \forall y(S(x,y) \to \neg S(y,y))$ is niet correct want de subzin $S(x,y) \to \neg S(y,y)$ zal altijd waar zijn als de relatie $S(x,y)$ niet bestaat. Dus als kapper niemand scheert dan kan er alles van volgen, ook dat niemand zichzelf scheert. Ik behandel de eerste variant. Eerst test ik of de zin een tautologie is en dan kijk ik of er modellen bestaan. Zie het plaatje 2. Uit de eerste tableau volgt dat het geen tautologie is, want de tableau niet sluit. En uit de tweede tableau volgt dat er een model is die de formule waar maakt, namelijk als $D = d, I(S) = \emptyset$.

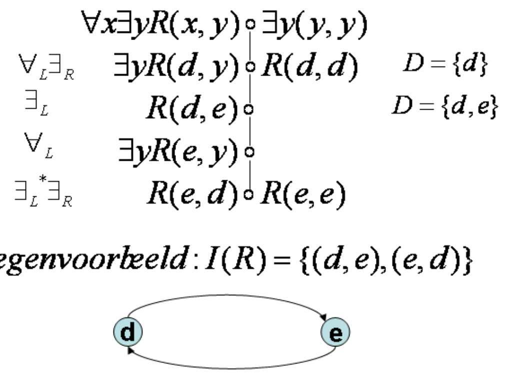

Figure 1: Opgave 4

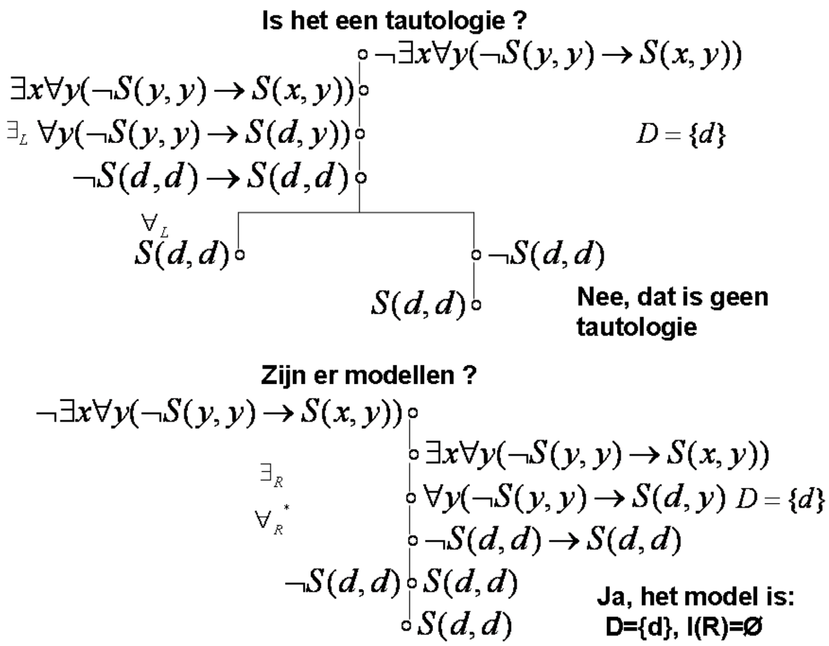

Figure 2: Opgave 5

6

Ontwerp een logisch programma dat beschrijft of een element X voor komt in een lijst L. Geef ook duidelijk aan hoe je lijsten representeert.

We gaan ervan uit dat een lijst kan als rij van elementen gerepresenteerd worden, bijvoorbeeld $[a, b, c, d]$. Elk element kan of een literal of een variabele of een constante zijn. Een lijst bestaat uit twee delen: head en tail. Head is het eerste element van de list en tail de rest van de lijst. We kunnen het programma "komt voor" met de volgende regels beschrijven:

1. X komt voor in een lijst als X overeenkomt net de head.
2. X komt voor in een lijst als X komt voor in de tail.

$$komtvoor(X, [X|\_]). \tag{1}$$
$$komtvoor(X, [\_|T]) \quad :- \quad komtvoor(X, [T]). \tag{2}$$