1. Zie *december 2003*.

2ac. Zie toets Den Haag *november 2011*.

2b. Als toets *oktober 2011*.

Let op. De eigenschappen van relatie $S \subseteq A \times A$ worden hier bekeken, gedefinieerd mbv. relatie $S \subseteq A \times B$. Haal de twee niet door elkaar.

Volgens de definitie is $(x, y) \in S$ desdals er een $z \in B$ bestaat met $(x, z) \in R$ en $(z, y) \in R^{-1}$. Oftewel $(x, z) \in R$ en $(y, z) \in R$, dwz x en y 'wijzen' naar hetzelfde element in B.

S is reflexief. Kies een willekeurige $x \in A$. Omdat $dom(R) = A$ is er uitgaande pijl in R, dus een $z \in B$ met $(x, z) \in R$, en dus $(z, x) \in R^{-1}$. Nu is $(x, x) \in S$.

S is symmetrisch. Als x en y naar dezelfde z wijzen, dan wijzen ook y en x naar die z.

S is niet transitief in het volgende voorbeeld. $R = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 2)\}$. Dan bevat S zowel (a, b) als (b, c) maar niet (a, c)

3. Zie *december 2004* en ook *maart 2005*.

4. Zie *december 2005* en ook *maart 2009*.

5a. Een graaf is bipartiet als de knopen in twee verzamelingen V_1 en V_2 verdeeld kunnen worden zodat elke lijn tussen V_1 en V_2 loopt. (Niet alle lijnen hoeven aanwezig te zijn.)

b. Een boom is bipartiet, stop nl. een knoop in V_1, al zijn buren in V_2, al hun buren weer in V_1, enz. *Ook*: Stelling zegt dat een graaf bipartiet is desdals er geen cykels van oneven lengte bestaan. Een boom heeft helemaal geen cykels, dus voldoet.

c. Maak de ongerichte boom gericht door een willekeurige knoop als wortel aan te wijzen. Nu heeft elke knoop een vader behalve de wortel. Omdat elke lijn tussen vader en kind wijst klopt de telling.

6ac. Vergelijk *maart 2005*

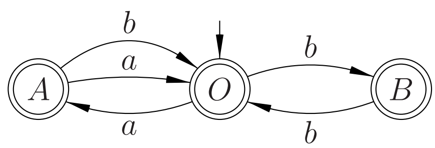
b. Symmetrie tussen 1 en 11, zoals gesuggereerd. $(12-x)^2 = 12^2 - 2 \cdot 12x + x^2 \equiv x^2$, gewoon uitrekenen en 12-vouden weglaten. Kan ook zonder rekenen. Er geldt dat $12 - x \equiv -x$ modulo 12, dan ook gelijkheid voor de kwadraten $(12-x)^2 \equiv (-x)^2 = x^2$.

Extra. Er geldt óók symmetrie tussen 0 en 6 zoals je kunt zien. Zelfde rekenwerk: $(6-x)^2 = 12^2 - 2 \cdot 6x + x^2 \equiv x^2$.

7a. (i) In $(ab)^* = \{\lambda, ab, ababa, \ldots\}$ staat de letter a steeds op oneven positie Dat vinden we stoer.

(ii) Niet elk woord in $(aba)^*$ is stoer, bijvoorbeeld *abaabaaba* heeft een a op positie 6, net na de b op positie 5. Daarom geldt de inclusie niet.

b. Elke knoop uit de automaat kan bijhouden of de positie van de komende letter even is, en of in dat geval de vorige letter een a of een b was.
O = oneven positie; A = even positie, vorige was a; B = even positie, vorige was b.



Geen transitie vanuit B met label a, want geen a op even positie na een b.
Begintoestand O, alledrie eindtoestand.
Inderdaad, deze automaat is niet deterministisch—dat werd deze maal niet gevraagd—maar dat is eenvoudig te herstellen.

c. We kunnen woorden checken op stoerheid door letters in tweetallen te bekijken, op achtereenvolgende oneven en even posities.

Alleen de combinatie *ba* mag dan niet voorkomen. Dat verklaart de expressie.

Let op. Eigenlijk moeten we zowel aantonen dat $K \subseteq \{\}^* \cdot \{\}$ (alle stoere woorden voldoen aan de expressie) als $K \supseteq \{\}^* \cdot \{\}$ (de expressie bestaat uit stoere woorden). Niet veel mensen hebben dat heel nauwkeurig gedaan.

HJH jan '12