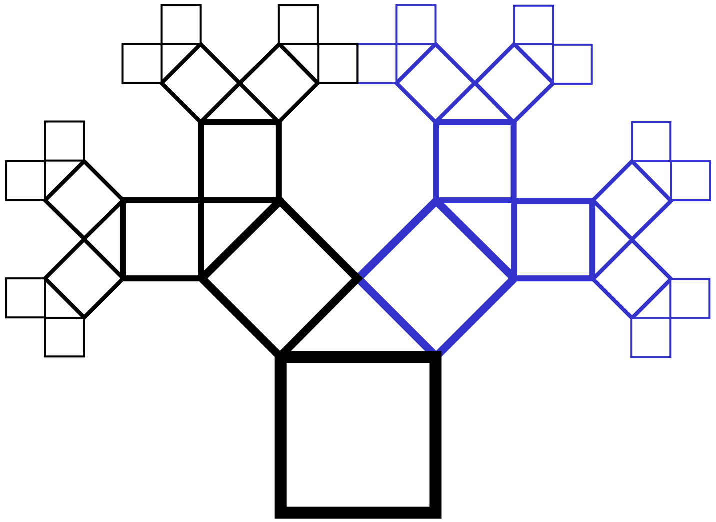


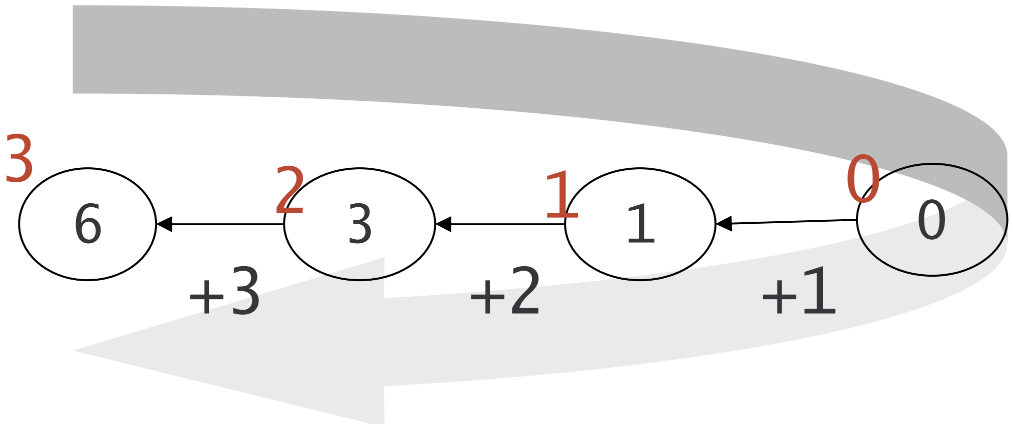
Recursie en inductie

inductie en recursie

$$a_0 = 0$$
$$a_n = a_{n-1} + n \qquad (n \geq 1)$$

$a_0 = 0$
$a_1 = a_0 + 1 = 0 + 1 = 1$
$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$
$a_3 = a_2 + 3 = 3 + 3 = 6$

0, 1, 3, 6, 10, …

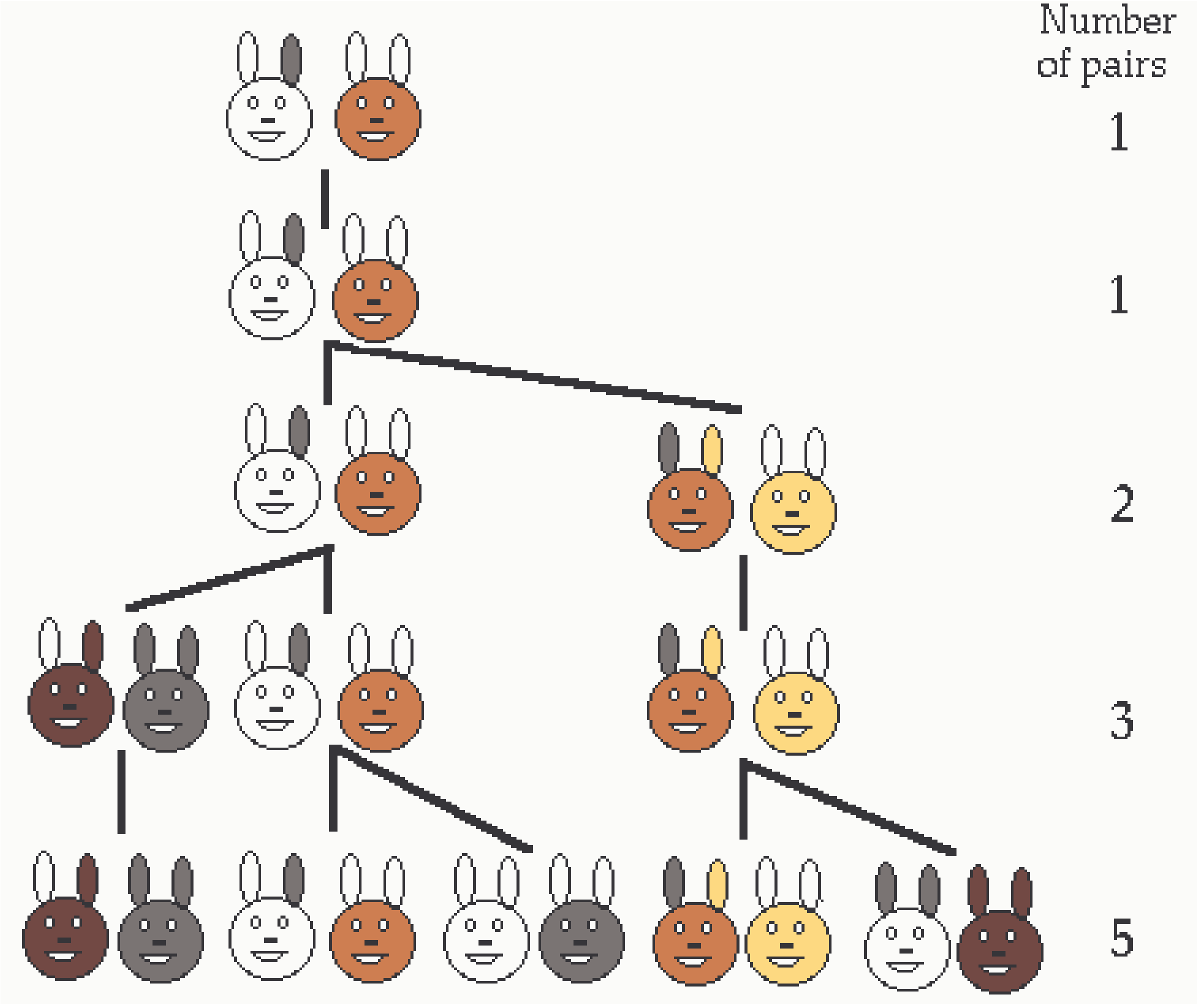


$a_3 =$
$a_2 + 3 =$
$a_1 + 2 + 3 = a_1 + 5 =$
$a_0 + 1 + 5 = a_0 + 6 =$
$0 + 6 = 6$

Fibonacci

$a_0 = 0 \qquad a_1 = 1$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 1)$

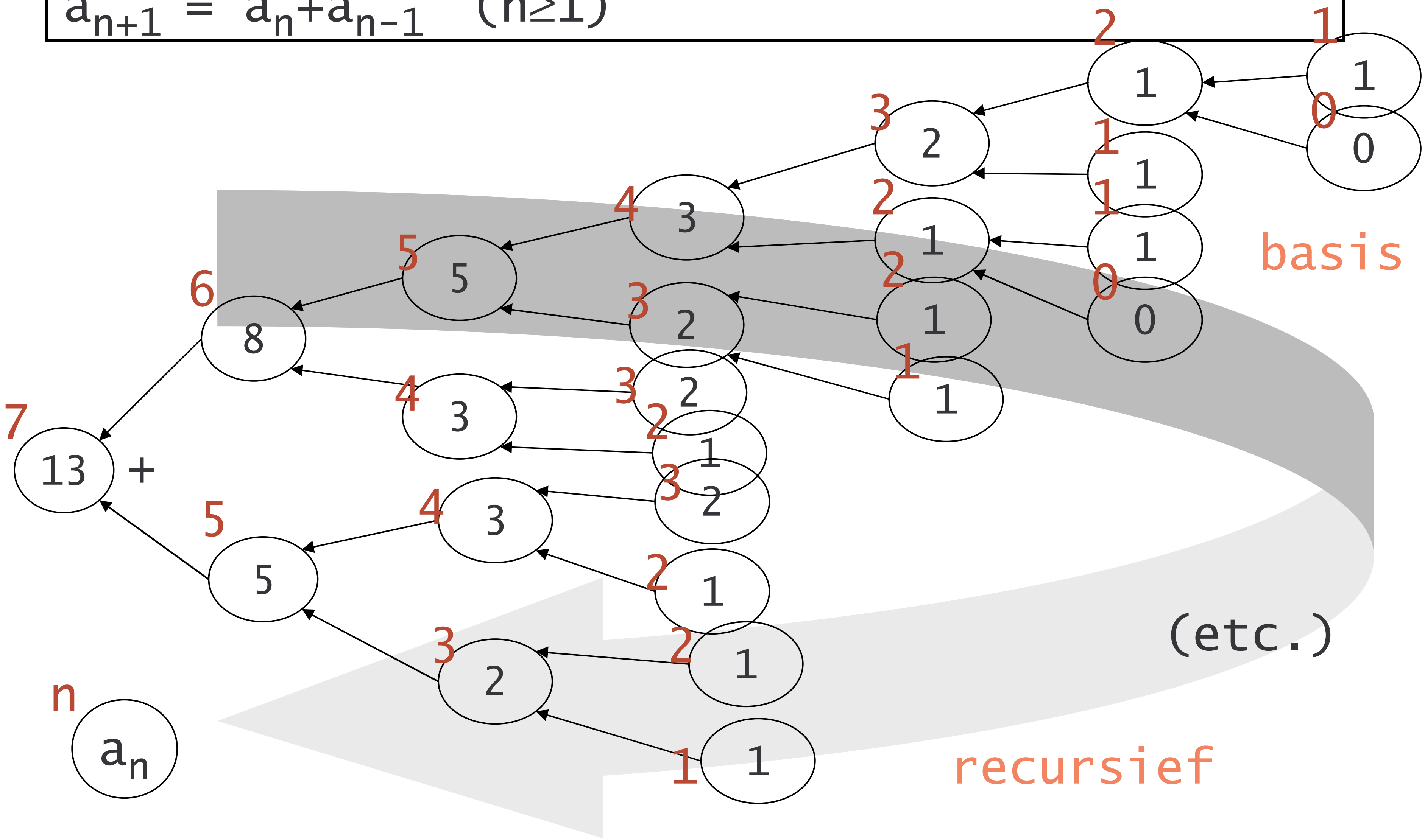


inductieve definitie

Fibonacci

$a_0 = 0 \qquad a_1 = 1$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 1)$



inductief

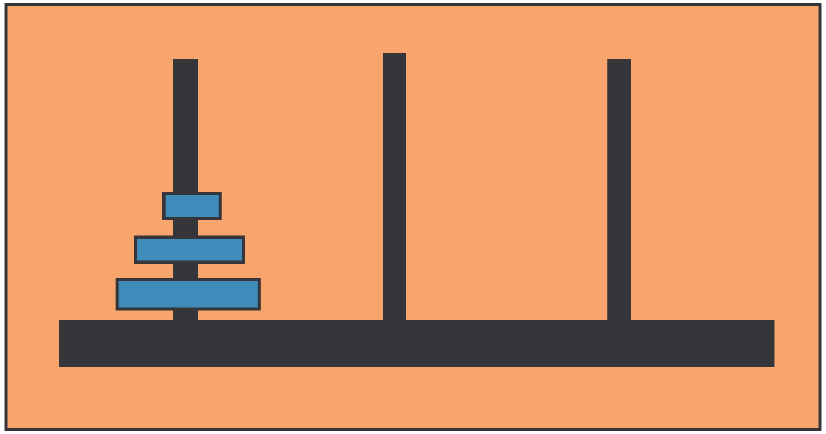
van klein naar groot

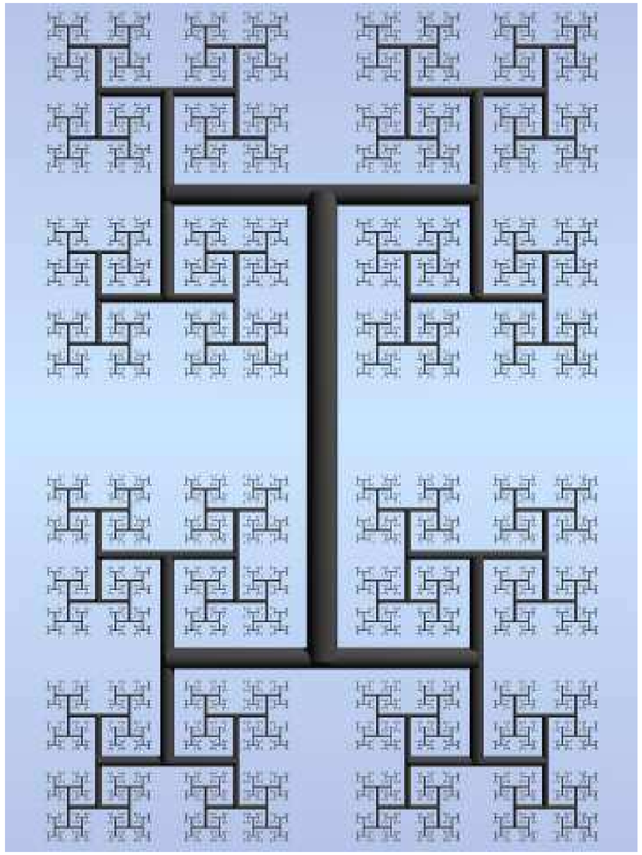
bottom-up

recursief

in termen van zichzelf

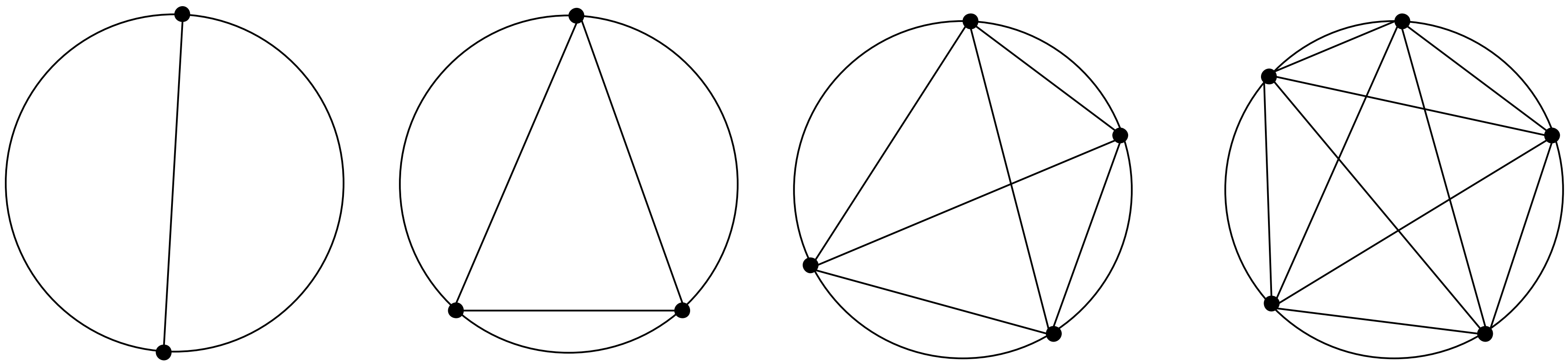
top-down






6 kr
Sverige
A. KORNESTEDT 2000
HELGE von KOCHS SNÖFLINGEKURVA
6 kr
Sverige
A. KORNESTEDT 2000
HELGE von KOCHS SNÖFLINGEKURVA

regelmaat



2 4 8 16 …

heel veel voorbeelden

- verzamelingen
- relaties
- rijtjes
- functies
- bomen
- grafen
- ordeningen
- syntax & semantiek

- bewijzen

E = { 0, 2, 4, 6, … }   … stipjes …

even getallen: inductieve definitie

basis

i. $0 \in E$

inductiestap

ii. als $x \in E$ dan $x+2 \in E$

uitsluiting

iii. E bevat geen andere elementen dan die door toepassing van i. en ii. verkregen

basis en inductiestap
mogen meerdere regels bevatten

taal: ‘strings’

<u>basis</u>

i. $a \in B$, $b \in B$

<u>inductiestap</u>

ii. als $x,y \in B$ dan $+xy \in B$

<u>uitsluiting</u>

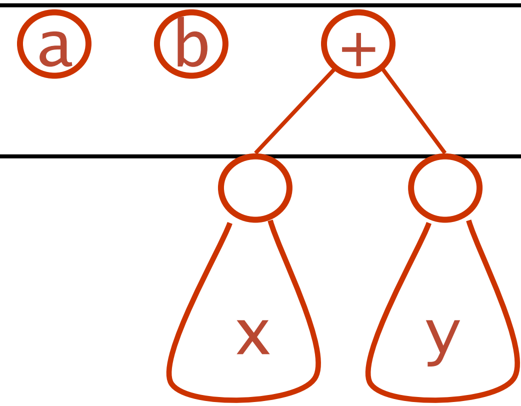
iii. B bevat geen andere elementen dan die door toepassing van i. en ii. verkregen

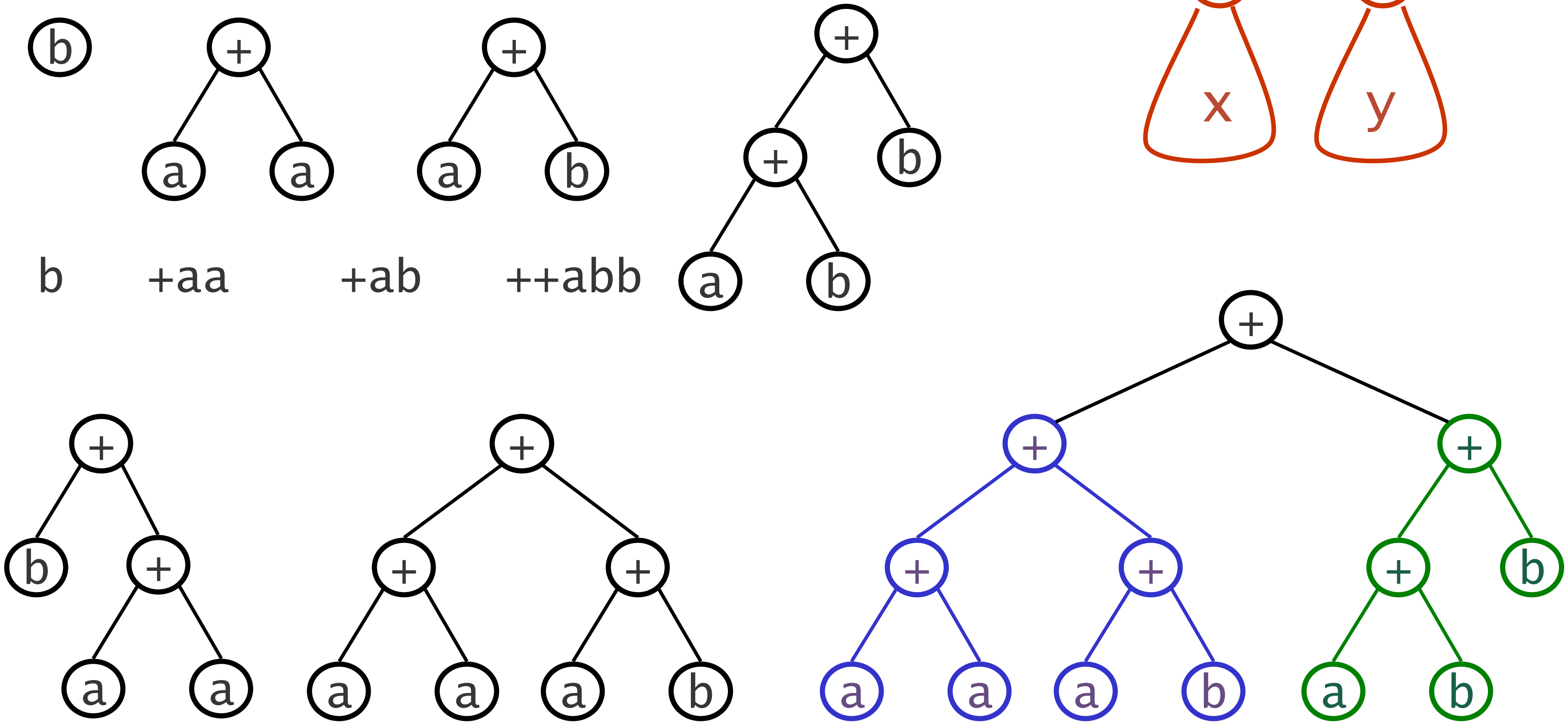
b, +aa, +ab, ++abb, +b+aa, ++aa+ab, … +++aa+ab++abb, …

(dit zijn binaire bomen)

binaire bomen (?)

i. a ∈ B, b ∈ B
ii. als x,y ∈ B dan +xy ∈ B

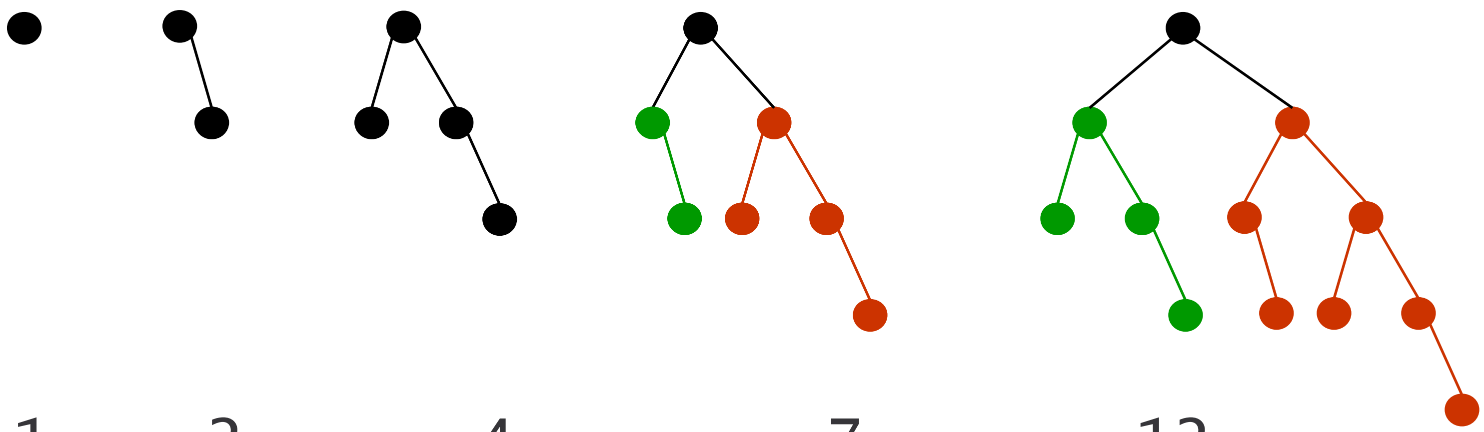




+b+aa ++aa+ab +++aa+ab++abb, …

Fibonacci bomen

i. T_0 heeft géén knopen
ii. T_1 heeft één knoop
ii. T_{n+1} heeft een wortel met deelbomen T_{n-1} en T_n



0 1 2 4 7 12 …

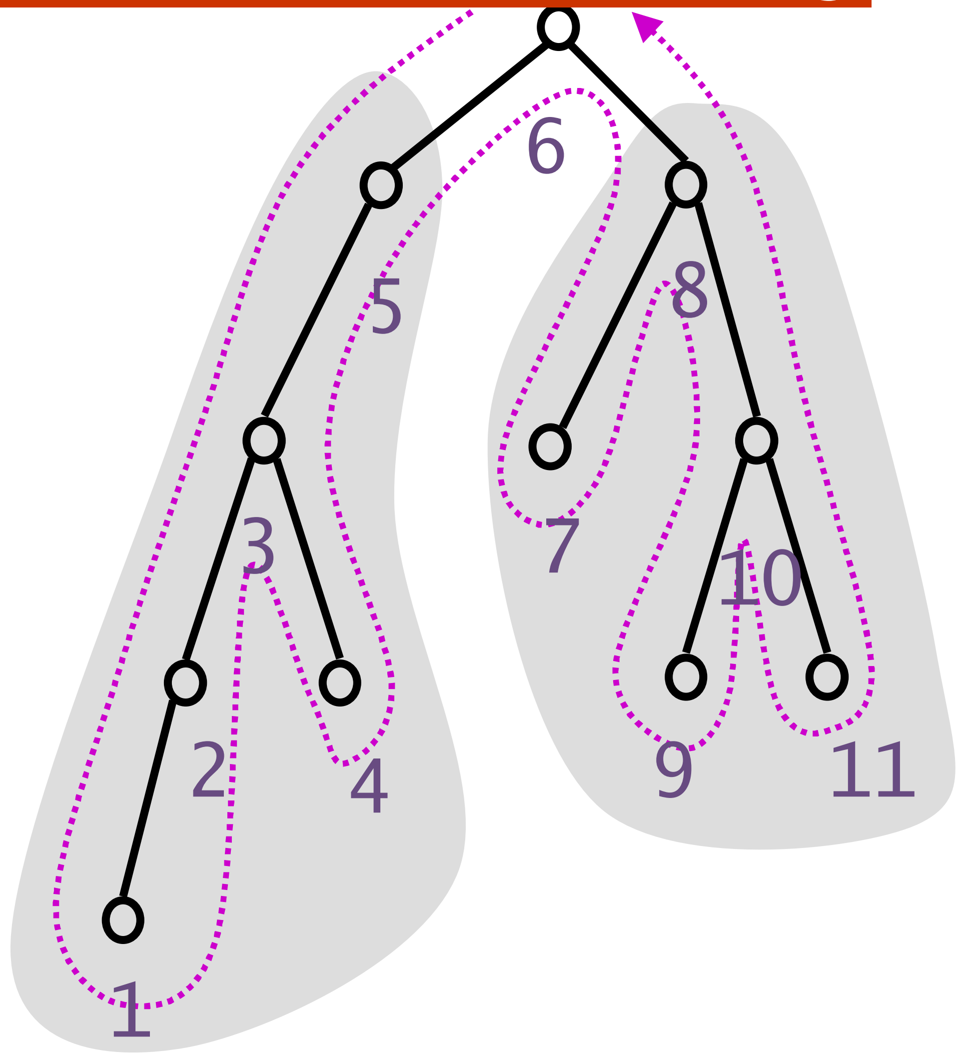
1 2 3 5 8 13 …

T_n heeft $\varphi_{n+1}-1$ knopen

(volgt nog)

symmetrische ordening

bij binaire bomen



$symm(\emptyset) = \lambda$

$symm(T) = symm(T_\ell), \text{ wortel}(T), symm(T_r)$

relatie

i. $0<1$
ii. als $x<y$ dan $x<y+1$ en $x+1<y+1$
iii. $<$ bevat geen andere elementen dan die door toepassing van i. en ii. verkregen

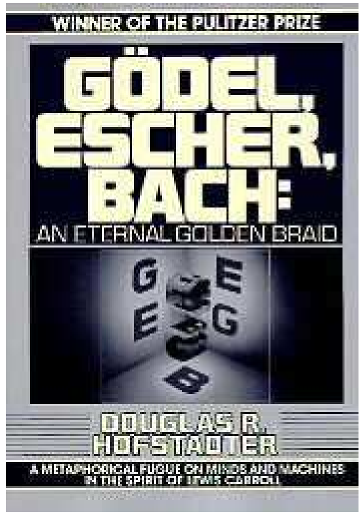
```
            0<1
         0<2   1<2
      0<3   1<3   2<3
   0<4   1<4   2<4   3<4
0<5   1<5   2<5   3<5   4<5
```

verzamelingen:

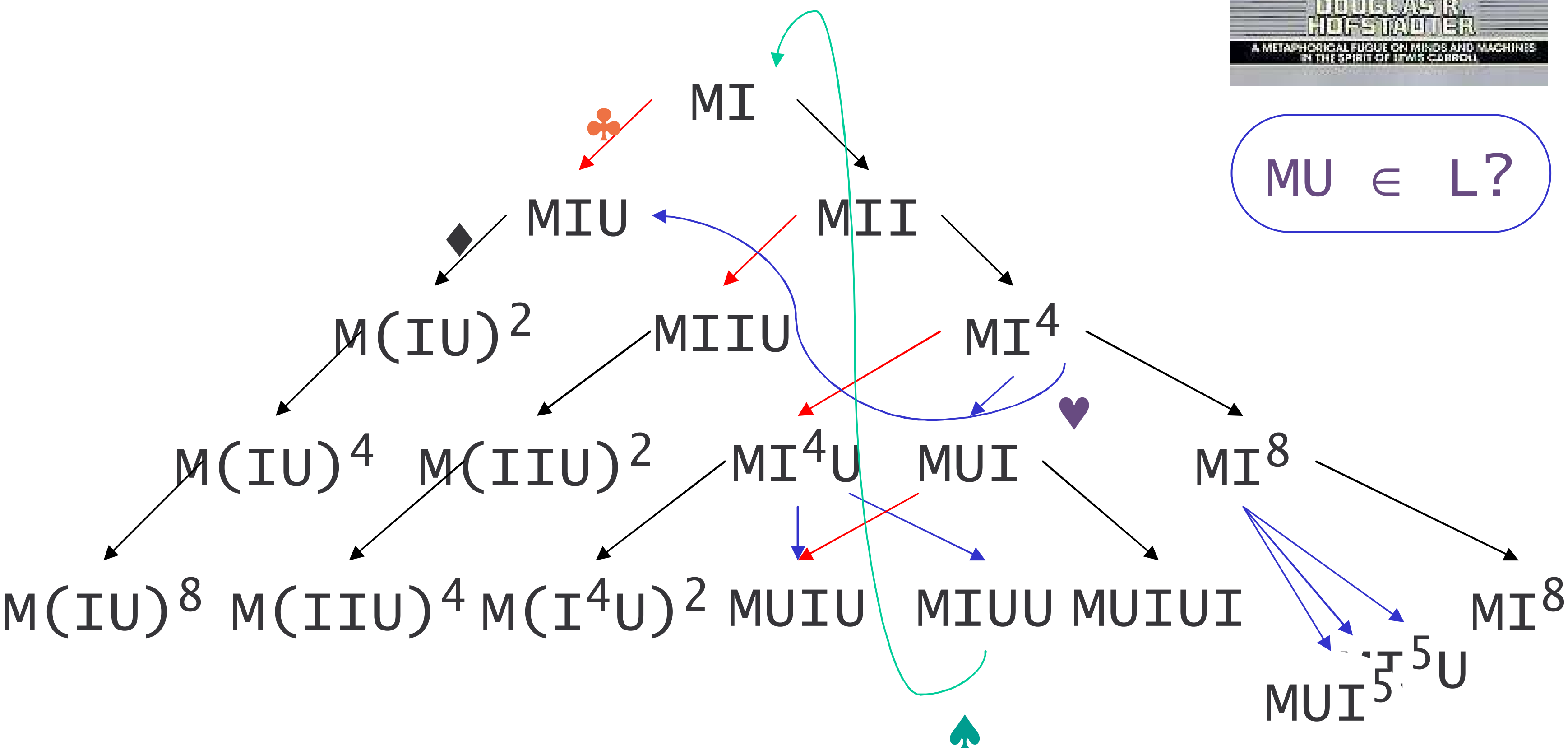
- getallen
- strings
- paren

taal 'MU puzzle'

- MI $\in$ L
- als xI $\in$ L dan xIU $\in$ L ♣
  als Mx $\in$ L dan Mxx $\in$ L ♦
  als xIIIy $\in$ L dan xUy $\in$ L ♥
  als xUUy $\in$ L dan xy $\in$ L ♠
- L bevat geen andere elementen



MU $\in$ L?



rekenkundige expressies

$D = \{ 0,1,2, \dots , 9 \}$

i. ieder element van $D^*-\{\lambda\}$ behoort tot R

ii. als $x \in R$, dan $(-x) \in R$

als $x \in R$ en $y \in R$,

dan $(x+y) \in R$, $(x-y) \in R$, $(x*y) \in R$, $(x/y) \in R$

iii. R bevat geen andere elementen dan die door toepassing van i en ii kunnen worden verkregen

$+ \; - \; \cdot \; /$ zijn symbolen, geen operaties

27

0014 -(0014)

((1+13)*8)

(8/(2-2))

(27/(15+12-27))

(3-(-(-(5/7))))

rekenkundige expressies syntax (1)

$D = \{ 0,1,2, \dots , 9 \}$

i. ieder element van $D^*-\{\lambda\}$ behoort tot R

ii. als $x \in R$, dan $(-x) \in R$

als $x \in R$ en $y \in R$,

dan $(x+y) \in R$, $(x-y) \in R$, $(x*y) \in R$, $(x/y) \in R$

rekenkundige expressies: semantiek

definieer de *waarde* $w(z)$ van een expressie

i. voor $z \in D^*-\{\lambda\}$ is $w(z)$ de ‘getalswaarde’ van z

ii. als $z = (-x)$ dan $w(z) = -w(x)$

als $z = (x+y)$ dan $w(z) = w(x)+w(y)$

als $z = (x-y)$ dan $w(z) = w(x)-w(y)$

als $z = (x*y)$ dan $w(z) = w(x)*w(y)$

als $z = (x/y)$ dan $w(z) = w(x)/w(y)$ tenzij $w(y)=0$

string getal

rekenkundige expressies semantiek

```
ii. als z = (-x) dan w(z) = -w(x)
    als z = (x+y) dan w(z) = w(x)+w(y)
    als z = (x-y) dan w(z) = w(x)-w(y)
    als z = (x*y) dan w(z) = w(x)*w(y)
    als z = (x/y) dan w(z) = w(x)/w(y) tenzij w(y)=0
```

```
z = ((23-(12+7))*2)

w(z) = w( ((23-(12+7))*2) ) =
     = w( (23-(12+7)) ) * w( 2 ) =
     = ( w( 23 ) - w( (12+7) ) ) * 2
     = ( 23 - ( w( 12 ) + w( 7 ) ) ) * 2
     = ( 23 - ( 12 + 7 ) ) * 2
     = 8
```

rekenkundige expressies syntax (2)

$D = \{\ 0,1,2,\ \dots\ ,\ 9\ \}$

i. ieder element van $D^*-\{\lambda\}$ behoort tot R

ii. als $x \in R$ en $y \in R$, dan $x+y \in R$, $x-y \in R$

iii. R bevat geen andere elementen …

rekenkundige expressies: semantiek

i. voor $z \in D^*-\{\lambda\}$ is $w(z)$ de 'getalswaarde' van z

ii. als $z = x+y$ dan $w(z) = w(x)+w(y)$

als $z = x-y$ dan $w(z) = w(x)-w(y)$

$z = 23-12+7$

$$w(z) = w(23)-w(12+7) = 23-\{w(12)+w(7)\}$$
$$= 23-\{12+7\} = 23-19 = 4$$

$$w(z) = w(23-12)+w(7) = \{w(23)-w(12)\}+7$$
$$= \{23-12\}+7 = 11+7 = 18$$

rekenkundige expressies syntax (2)

afgekeurd!

$D = \{ 0,1,2, \ldots , 9 \}$

i. ieder element van $D^*-\{\lambda\}$ behoort tot R

ii. als $x \in R$ en $y \in R$, dan $x+y \in R$, $x-y \in R$

iii. R bevat geen andere elementen …

z = 23-12+7 dubbelzinnig :
op twee manieren geconstrueerd

rekenkundige expressies: syntax (1)

ii. als $x \in R$, dan $(-x) \in R$
als $x \in R$ en $y \in R$,
dan $(x+y) \in R$, $(x-y) \in R$, $(x*y) \in R$, $(x/y) \in R$

volledige haakjes óf
voorrangsregels, associativiteit
23-12+7 => ((23-12)+7)

syntax: geheel getal

$$\langle\text{geheel}\rangle ::= \langle\text{teken}\rangle\langle\text{natuurlijk}\rangle \mid \langle\text{natuurlijk}\rangle$$
$$\langle\text{natuurlijk}\rangle ::= \langle\text{cijfer}\rangle \mid \langle\text{cijfer}\rangle\langle\text{natuurlijk}\rangle$$
$$\langle\text{cijfer}\rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$$
$$\langle\text{teken}\rangle ::= + \mid -$$

$$\langle\text{natuurlijk}\rangle \Rightarrow \langle\text{teken}\rangle\langle\text{natuurlijk}\rangle$$
$$\Rightarrow -\ \langle\text{natuurlijk}\rangle \Rightarrow -\langle\text{cijfer}\rangle\langle\text{natuurlijk}\rangle$$
$$\Rightarrow -3\ \langle\text{natuurlijk}\rangle \Rightarrow -3\ \langle\text{cijfer}\rangle\langle\text{natuurlijk}\rangle$$
$$\Rightarrow -31\ \langle\text{natuurlijk}\rangle \Rightarrow -31\ \langle\text{cijfer}\rangle\langle\text{natuurlijk}\rangle$$
$$\Rightarrow -315\ \langle\text{natuurlijk}\rangle \Rightarrow -315\ \langle\text{cijfer}\rangle \Rightarrow -3157$$

syntax: statements

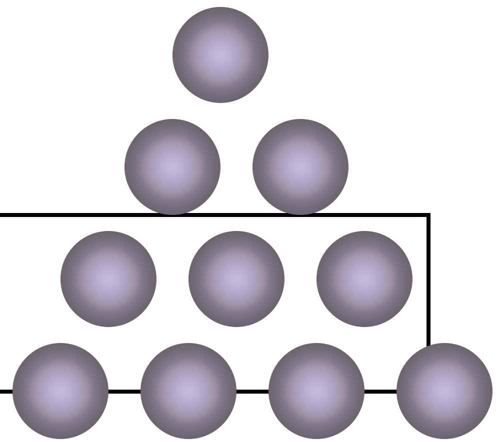
```
⟨assignment⟩ ::= ⟨variable⟩ = ⟨expression⟩

⟨statement⟩  ::= ⟨assignment⟩ |
                 ⟨compound-statement⟩ |
                 ⟨if-statement⟩ |
                 ⟨while-statement⟩ | …

⟨if-statement⟩ ::=
     if ⟨test⟩ then ⟨statement⟩ |
     if ⟨test⟩ then ⟨statement⟩ else ⟨statement⟩

⟨while-statement⟩ ::=
     while ⟨test⟩ do ⟨statement⟩
```

recursieve functie

$f(0) = 1$
$f(n) = n \cdot f(n-1) \quad (n \geq 1)$

$f(8) = 8 \cdot f(7) = 8 \cdot 7 \cdot f(6) = \ldots$
$= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot f(0) = 8!$

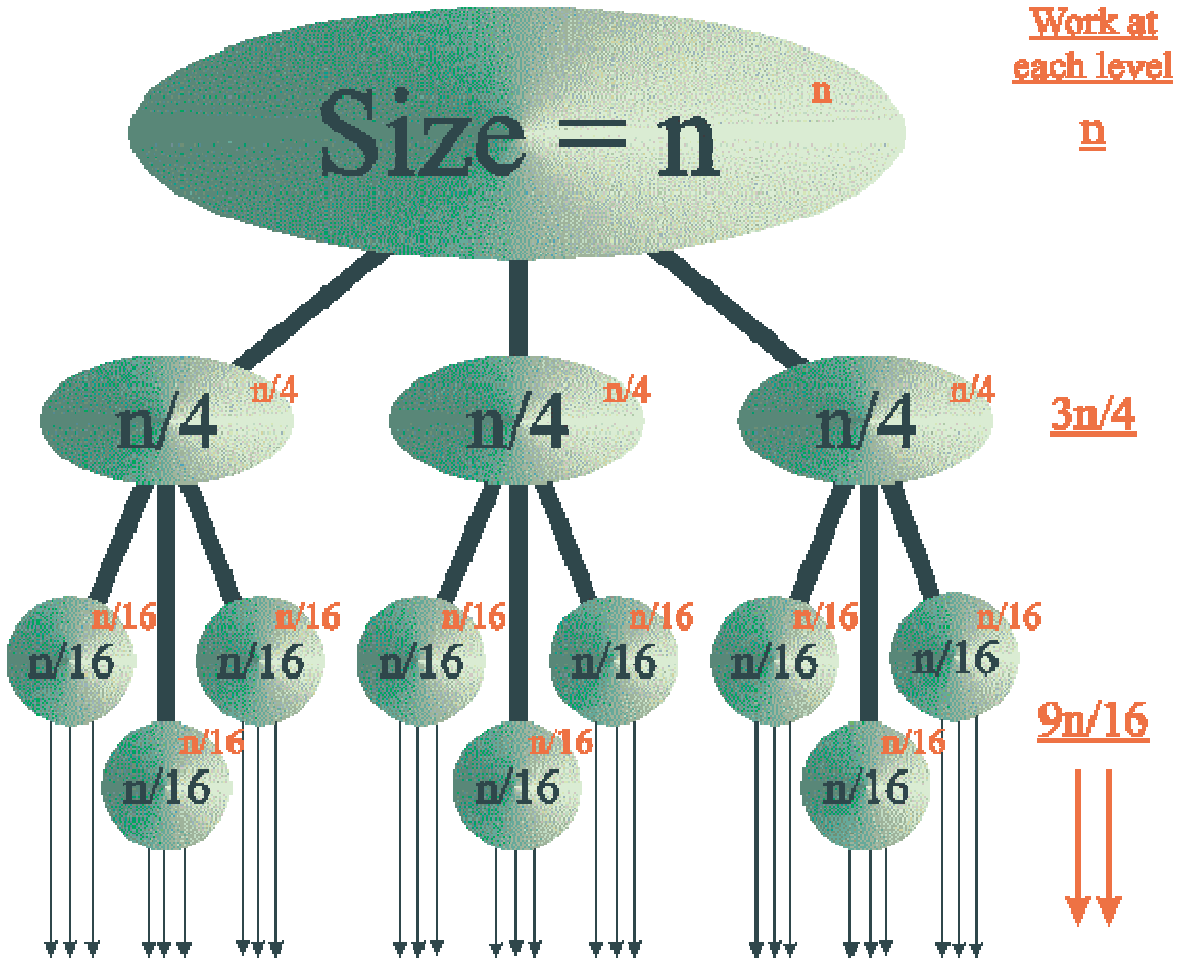
gesloten formule (expliciet)
$f(n) = n!$



$g(0) = 0$
$g(n) = n + g(n-1) \quad (n \geq 1)$

$g(8) = 8 + g(7) = 8 + 7 + g(6) = \ldots$
$= 8+7+6+5+4+3+2+1+g(0) = 36$
$g(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$f(1) = c$$
$$f(n) = a \cdot f(n/b) + c \quad (n=b^k)$$



recurrente betrekking

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 1)$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

Fibonacci

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}$$

Binet

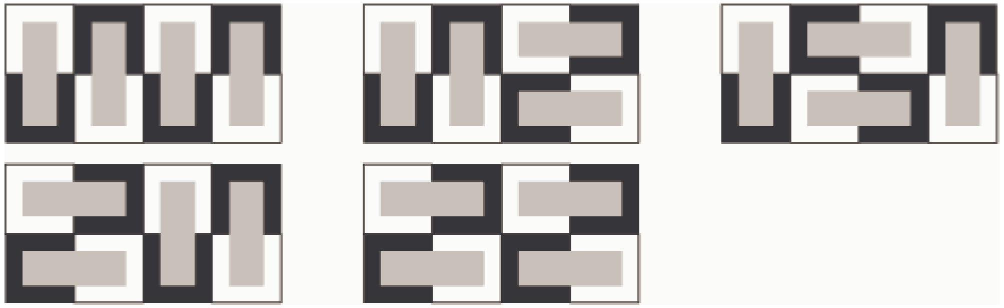
gulden snede

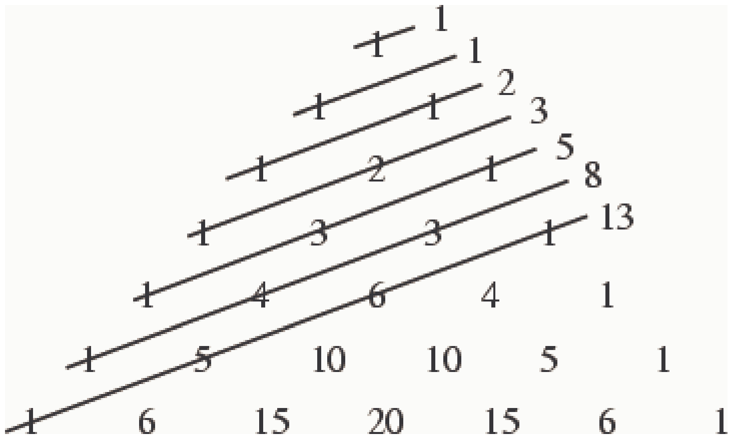
$x^2 = x + 1$

recursieve functie

$f(n+1) = f(n) + f(n-1)$

http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html





recurrente betrekking

$$t_0 = 5,\ t_1 = 6$$
$$t_n = t_{n-1} + 6t_{n-2} - 12n + 8 \quad (n \geq 2)$$

$$
\begin{array}{rcr}
 & & 5, \\
 & & 6, \\
6+30-24+8 & = & 20, \\
20+36-36+8 & = & 28, \\
28+120-48+8 & = & 108, \\
108+168-60+8 & = & 208, \\
208+648-72+8 & = & 792, \\
 & & \ldots
\end{array}
$$

$$t_n = 3^n + (-2)^n + 2n + 3$$ gesloten formule

(volgt nog)

recursieve functies bij bomen

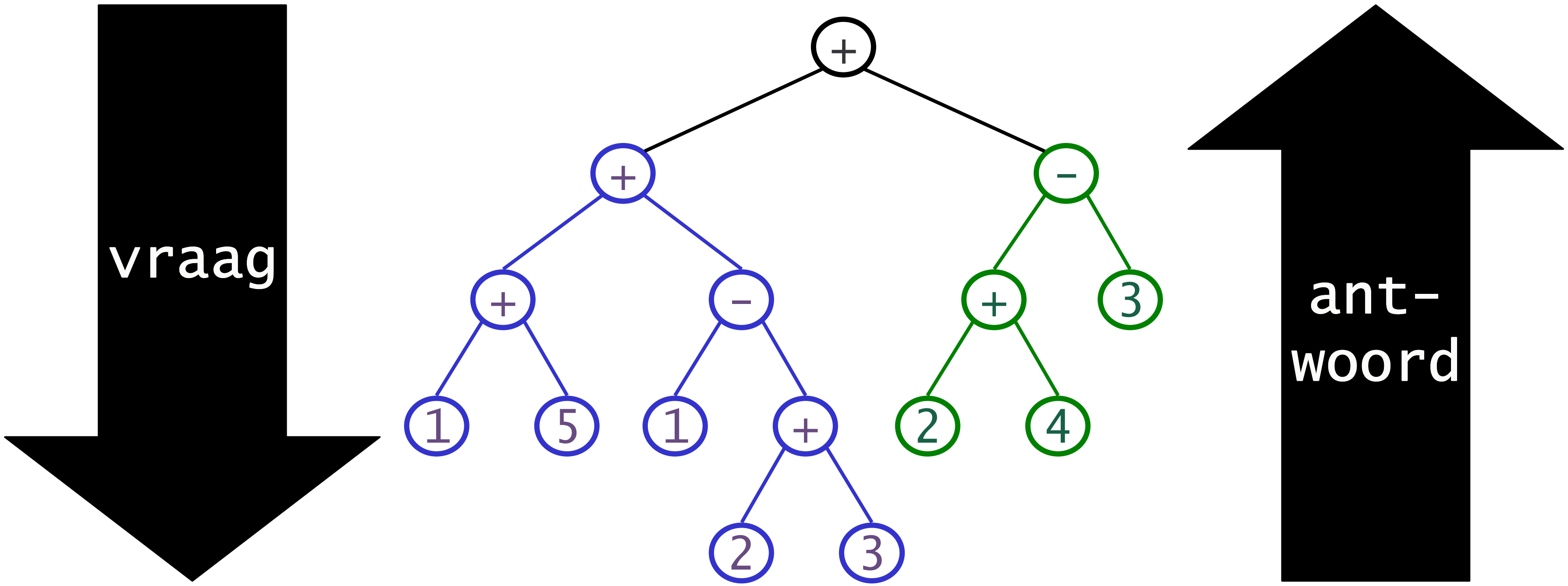
basis

```
  f(blad)  = …
```

recursie

```
  f(knoop) = f(links) & f(rechts)
```

((1+5)+(1-(2+3))) + ((2+4)-3)



mooie formule

$$f(n) = n^2 + n + 41$$

Euler 1772

dit zijn allemaal priemgetallen?

41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131,
151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347,
383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691,
743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163,
1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601, …

toch niet …

$f(41) = 41 \cdot 41 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$

tegenvoorbeeld

drievouden

$5^n - 2^n$ is een drievoud voor $n \geq 0$

$$5^0-2^0 = 1-1 = 0$$
$$5^1-2^1 = 5-2 = 3$$
$$5^2-2^2 = 25-4 = 21$$
$$5^3-2^3 = 125-8 = 117$$
$$5^4-2^4 = 625-16 = 609$$

$$5^5-2^5 =$$
$$5 \cdot 5^4 - 5 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^4 =$$
$$5 \cdot (5^4-2^4) + (5-2) \cdot 2^4 =$$
$$5 \cdot (5^4-2^4) + 3 \cdot 2^4$$

$$5^{n+1}-2^{n+1} =$$
$$5 \cdot 5^n - 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n =$$
$$5 \cdot (5^n-2^n) + 3 \cdot 2^n$$

bewijs

$5^n - 2^n$ is een drievoud voor $n \geq 0$

dit is niet de beste methode: rekenen met rest!

inductie-bewijs

i. basis $(n=0)$

$5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ is een drievoud.

ii. inductiestap

inductie-aanname:

Neem aan $5^n - 2^n$ is een drievoud ($n \geq 0$)

Bewijs dat $5^{n+1} - 2^{n+1}$ een drievoud is.

$$5^{n+1} - 2^{n+1} =$$
$$5 \cdot 5^n - 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n =$$
$$5 \cdot (5^n - 2^n) + 3 \cdot 2^n$$

volledige inductie

$\mathbb{N}$ natuurlijke getallen

i. basis
Bewijs dat $P(0)$ waar is.
ii. inductiestap
Bewijs dat voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$:
als $P(n)$ waar is, dan is $P(n+1)$ waar.

inductie aanname

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(\ P(n) \Rightarrow P(n+1)\ ) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\ P(n)\ )$$

MU eigenschappen

- MI ∈ L
- als xI ∈ L dan xIU ∈ L ♣
  als Mx ∈ L dan Mxx ∈ L ♦
  als xIIIy ∈ L dan xUy ∈ L ♥
  als xUUy ∈ L dan xy ∈ L ♠
- L bevat geen andere elementen

Stelling

elk woord in L begint met M

<u>basis</u>

MI begint met M

<u>inductie</u> naar opbouw

♣ als xI met M begint, dan ook xIU

♦ Mxx begint met M

♥ als xIIIy met M begint, dan ook xUy

♠ als xUUy met M begint, dan ook xy

V inductief gedefinieerd
te bewijzen $P(x)$ voor alle $x \in V$

inductie

i. basis
Bewijs dat $P(x)$ waar is,
voor alle x in de basis van V.

ii. inductiestap
Bewijs dat $P(y)$ geldt
voor y geconstrueerd in inductiestap,
onder aanname dat $P(x)$ waar is
voor alle x waaruit y geconstrueerd is,

inductie aanname

MU ∉ L

- MI ∈ L
- als xI ∈ L dan xIU ∈ L ♣
  als Mx ∈ L dan Mxx ∈ L ♦
  als xIIIy ∈ L dan xUy ∈ L ♥
  als xUUy ∈ L dan xy ∈ L ♠
- L bevat geen andere elementen

eigenschap

aantal letters I woorden L nooit drievoud

basis

MI heeft één I; ok

inductie naar opbouw

♣ xIU evenveel I's als xI: geen drievoud

♦ Mxx tweemaal zoveel I's als Mx
en dit levert geen drievoud op

♥ uit xIIIy worden drie I's verwijderd, dit
kan ook geen drievoud opleveren

♠ xUUy evenveel I's als xy: geen drievoud

inductie voorbeeld

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 = 1\cdot 2\cdot 3\ /\ 6\\
1+4 &= 5 = 2\cdot 3\cdot 5\ /\ 6\\
1+4+9 &= 14 = 3\cdot 4\cdot 7\ /\ 6\\
1+4+9+16 &= 30 = 4\cdot 5\cdot 9\ /\ 6\\
1+4+9+16+25 &= 55 = 5\cdot 6\cdot 11\ /\ 6\\
1+4+9+16+25+36 &= 91 = 6\cdot 7\cdot 13\ /\ 6\\
&\dots
\end{aligned}
$$

$$\boxed{6\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)}$$

inductie voorbeeld

$$\boxed{6 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)}$$

eigenschap natuurlijke getallen ⇒ volledige inductie

basis: n=1.

$$6\cdot(1^2) = 1(1+1)(2+1)$$

inductiestap:

neem aan dat de formule klopt voor n,
en bewijs haar voor n+1.

$$6\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 6(n+1)^2 =$$

inductie-aanname

$$n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2 =$$

$$(n+1)\{n(2n+1)+6(n+1)\} =$$

$$(n+1)(2n^2+n+6n+6) =$$

$$(n+1)(n+2)(2n+3)$$

* volledige inductie

$\mathbb{N}$ natuurlijke getallen

i. basis

Bewijs dat $P(0)$ waar is.

ii. inductiestap

Bewijs dat voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$:

als $P(k)$ waar is, dan is $P(n+1)$ waar.

voor alle $k \leq n$

inductie aanname

recurrente betrekking

$$t_0 = 5,\quad t_1 = 6$$
$$t_n = t_{n-1} + 6t_{n-2} - 12n + 8 \quad (n \geq 2)$$

$$t_n = 3^n + (-2)^n + 2n + 3$$

gesloten uitdrukking

basis:

$n=0 \quad 3^0 + (-2)^0 + 2\cdot 0 + 3 = 5$

$n=1 \quad 3^1 + (-2)^1 + 2\cdot 1 + 3 = 6 \quad$ (ok)

inductiestap:

$t_{n+1} = t_n + 6t_{n-1} - 12\cdot(n+1) + 8 \overset{\text{inductie-aanname}}{=}$

$3^n+(-2)^n+2n+3+6\cdot(3^{n-1}+(-2)^{n-1}+2\cdot(n-1)+3)$
$-12\cdot(n+1)+8 =$

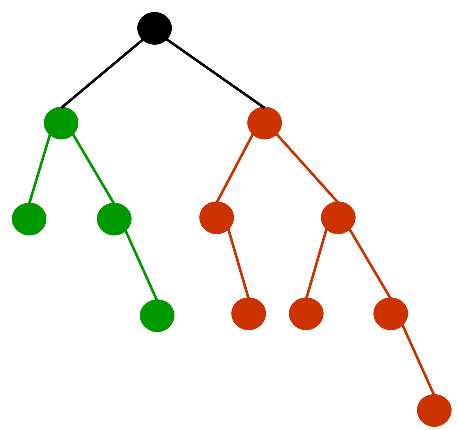
$(1+2)\cdot 3^n+(1-3)\cdot(-2)^n+(2+12-12)\cdot n+(3-12+18-12+8) =$

$3^{n+1} + (-2)^{n+1} + 2\cdot(n+1) + 3 \quad$ (ok!)

Fibonacci bomen

i. T_0 heeft géén knopen
ii. T_1 heeft één knoop
ii. T_{n+1} heeft een wortel en deelbomen T_{n-1} en T_n

T_n heeft $\varphi_{n+1}-1$ knopen

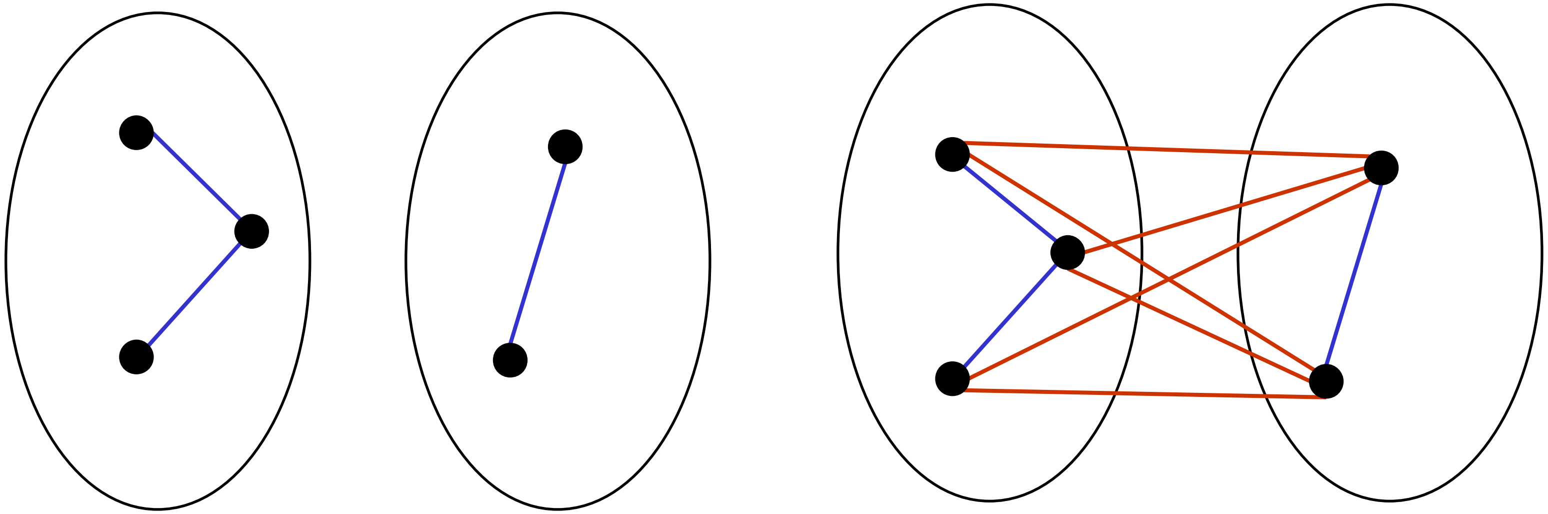


basis:

T_0 heeft 0 knopen; $\varphi_1 = 1$
T_1 heeft 1 knoop; $\varphi_2 = 2$

inductiestap:

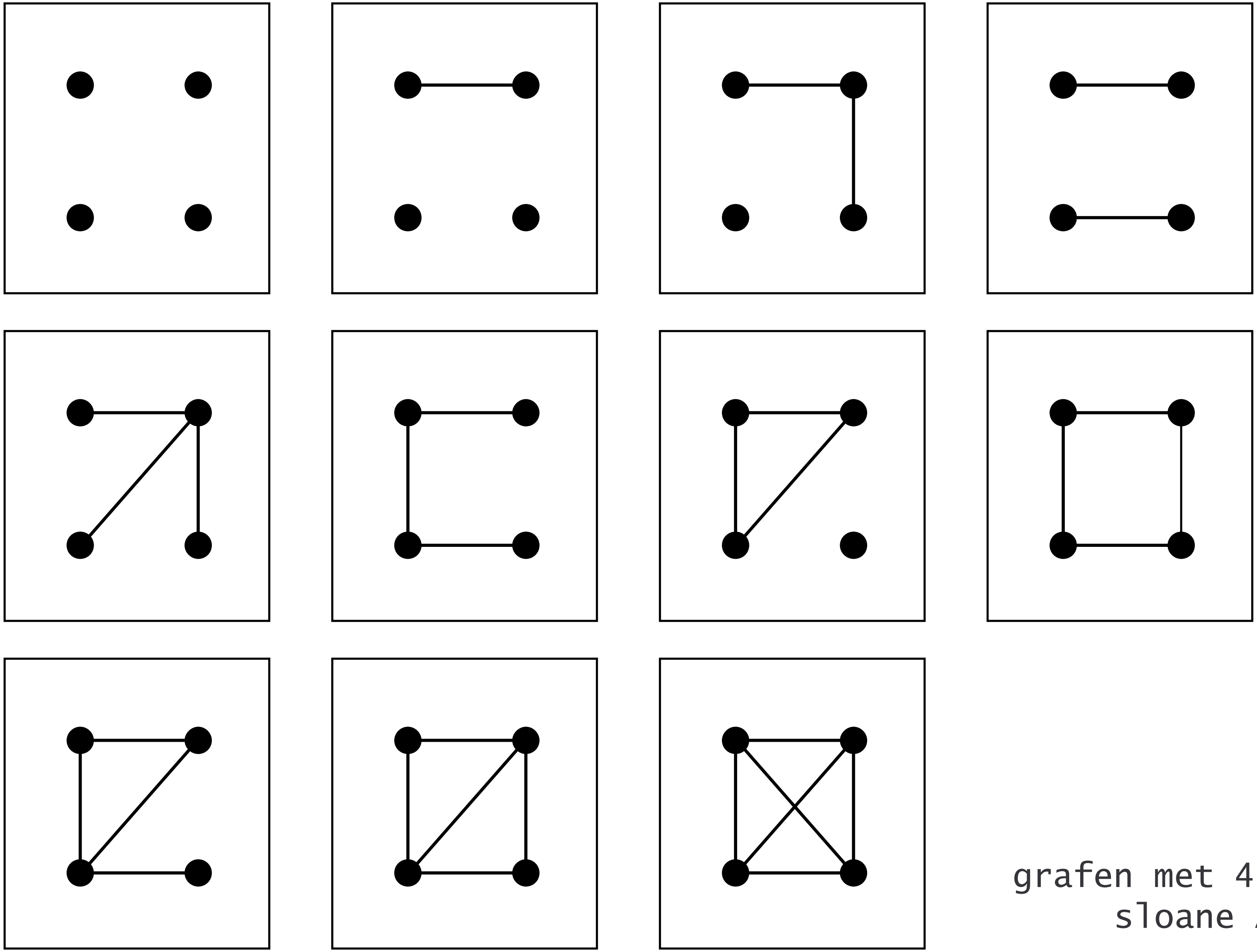
T_{n+1} heeft één knoop meer dan T_{n-1} en T_n samen
volgens de **inductieaanname** (en Fibo definitie)
is dit $(\varphi_n-1)+(\varphi_{n+1}-1)+1 = \varphi_{n+2}-1$



vereniging $\cup$ som $+$

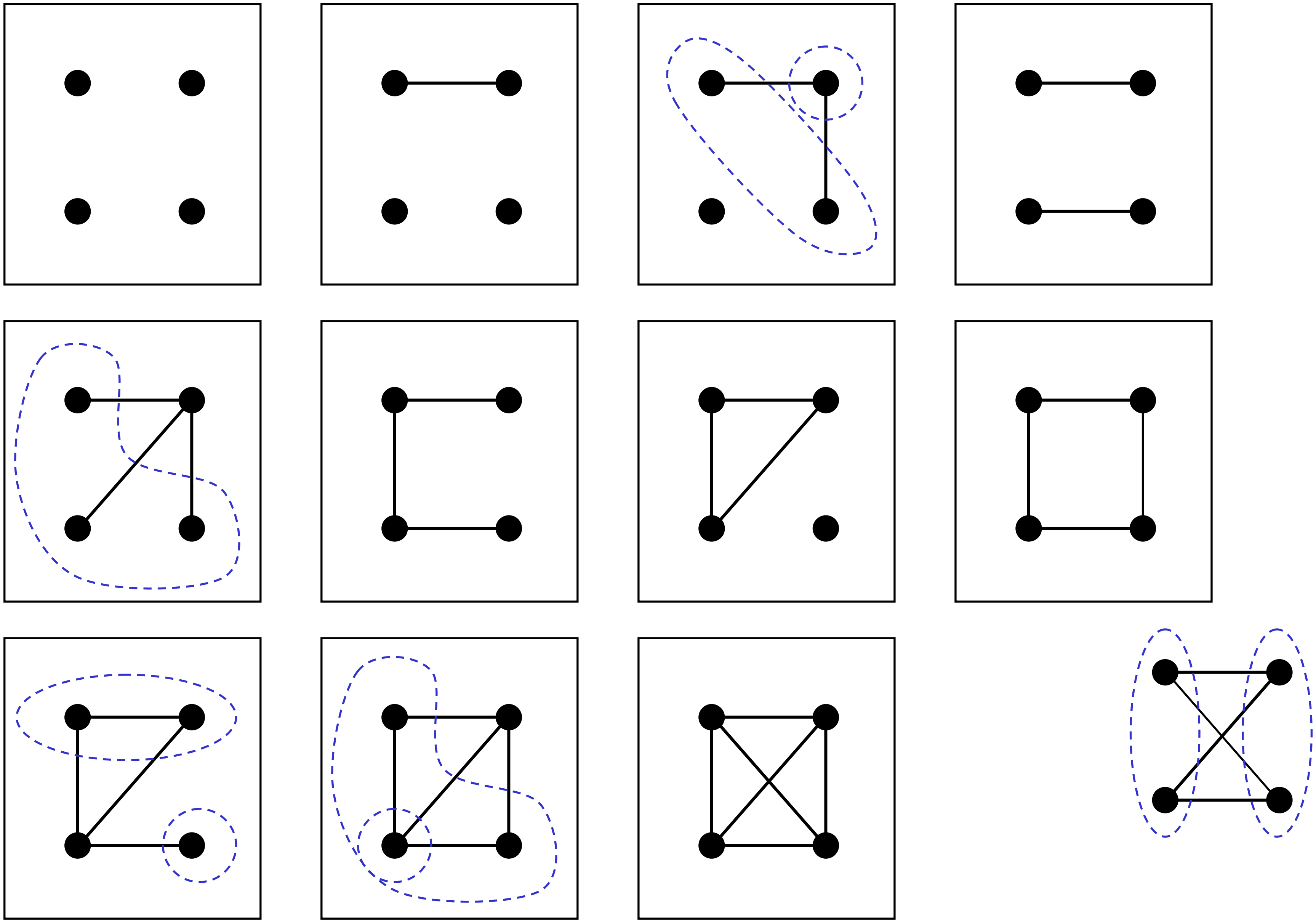
voorbeeld:
inductie bij grafen

co-grafen

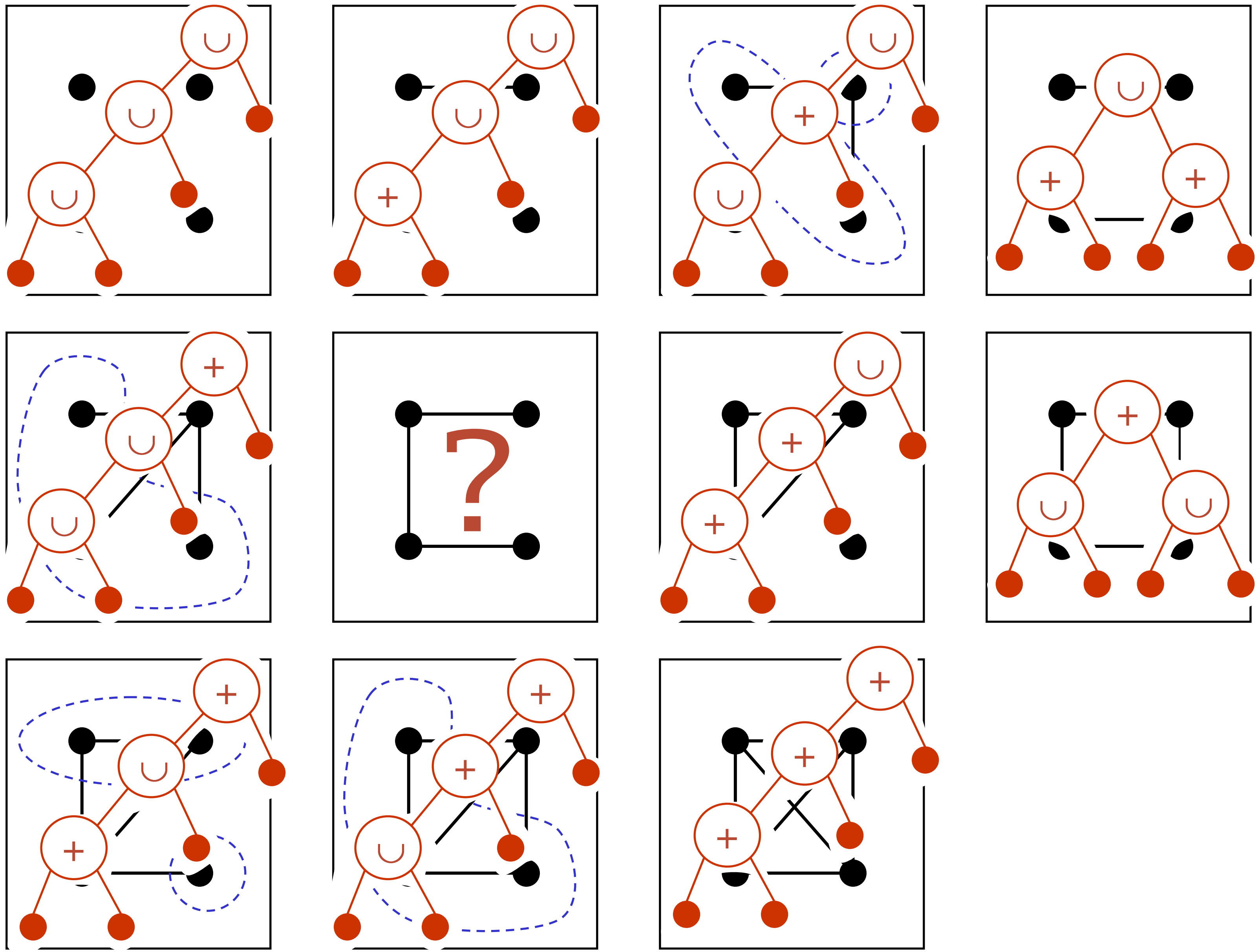


grafen met 4 knopen
sloane A000088

co-grafen



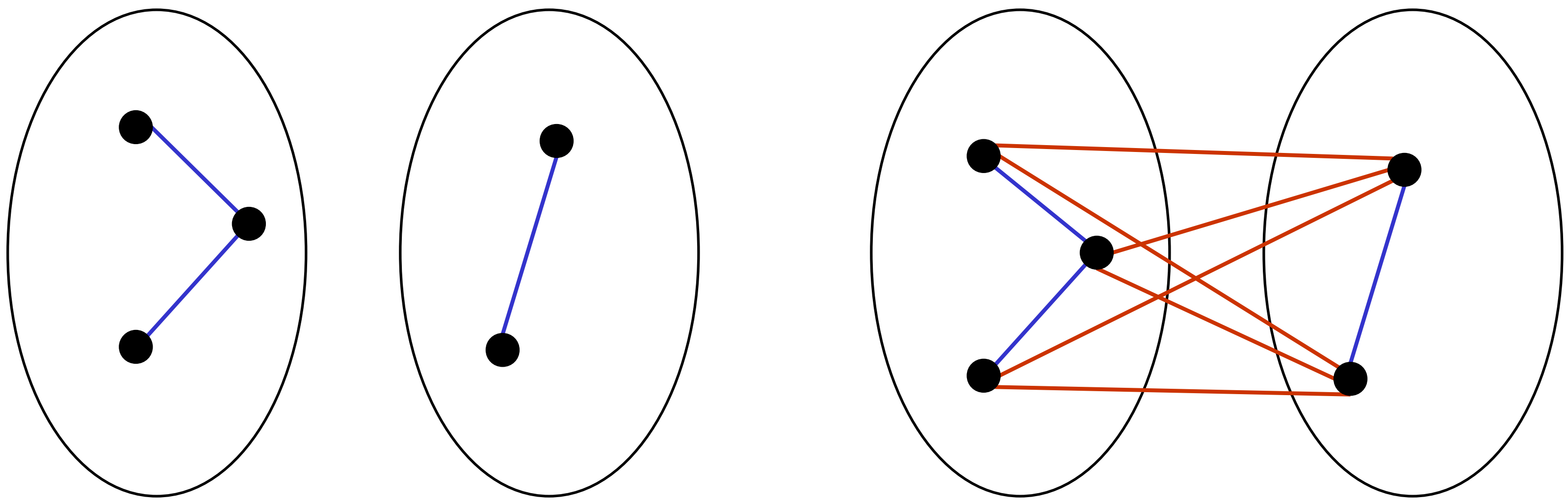
co-grafen



de graaf met één knoop is een co-graaf.
als G_1 en G_2 disjuncte co-grafen zijn,
dan zijn $G_1 \cup G_2$ en $G_1 + G_2$ co-grafen.

P_4 pad graaf

een co-graaf heeft P_4 niet als geïnduceerde deelgraaf (bewijs met inductie zie dictaat)



intentionally left blank

end …