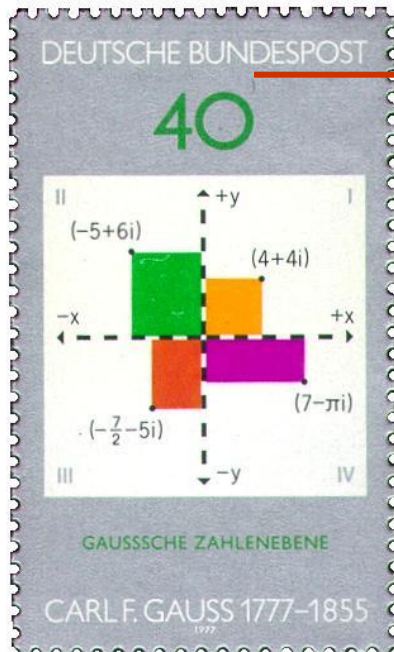
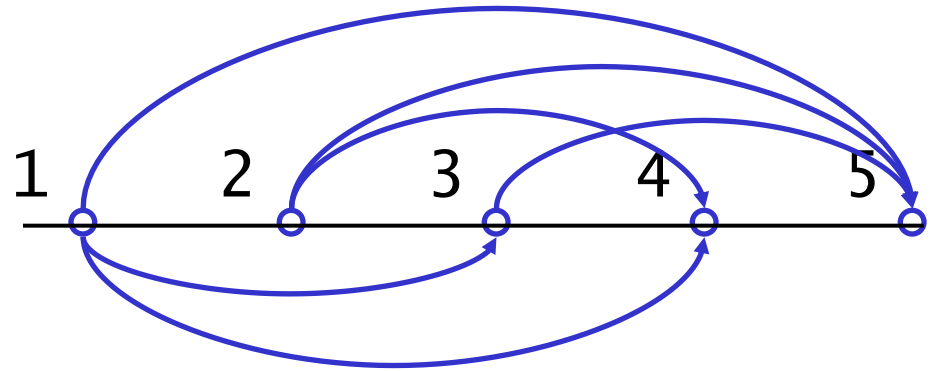
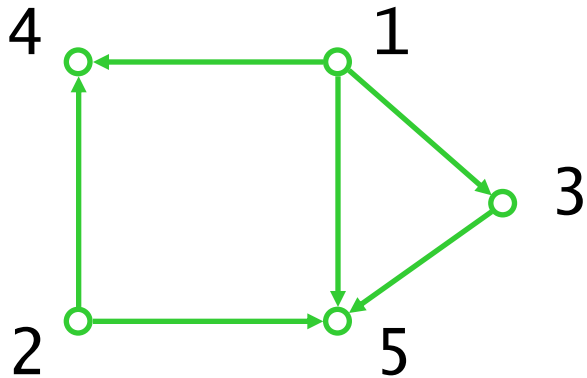


Relaties

2

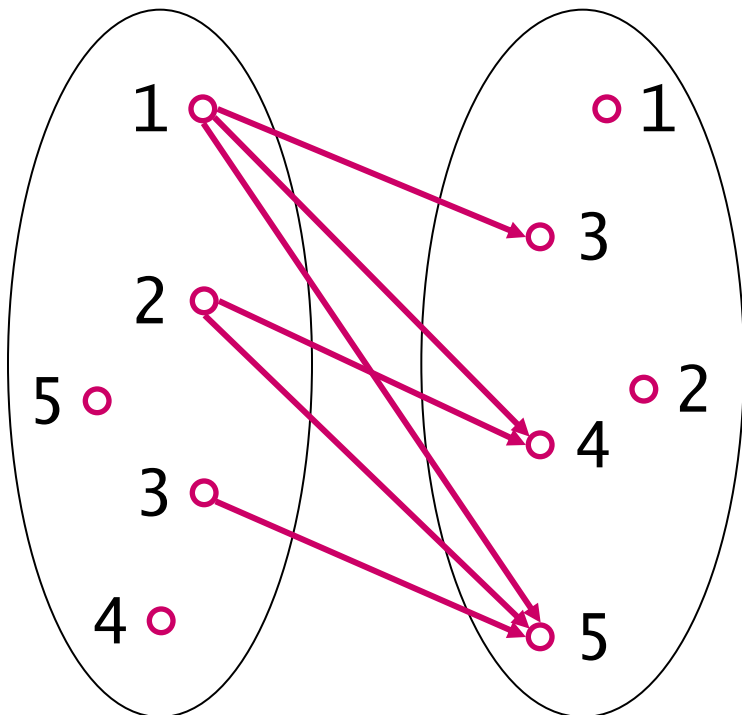


twee of meer erbij



$$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$E = \{ (i, j) \mid j \geq i+2 \}$$

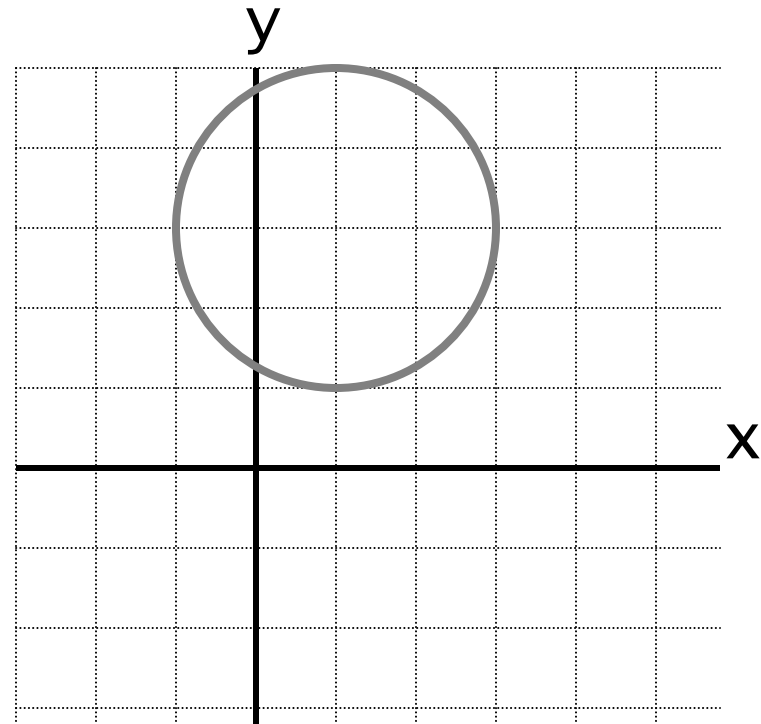
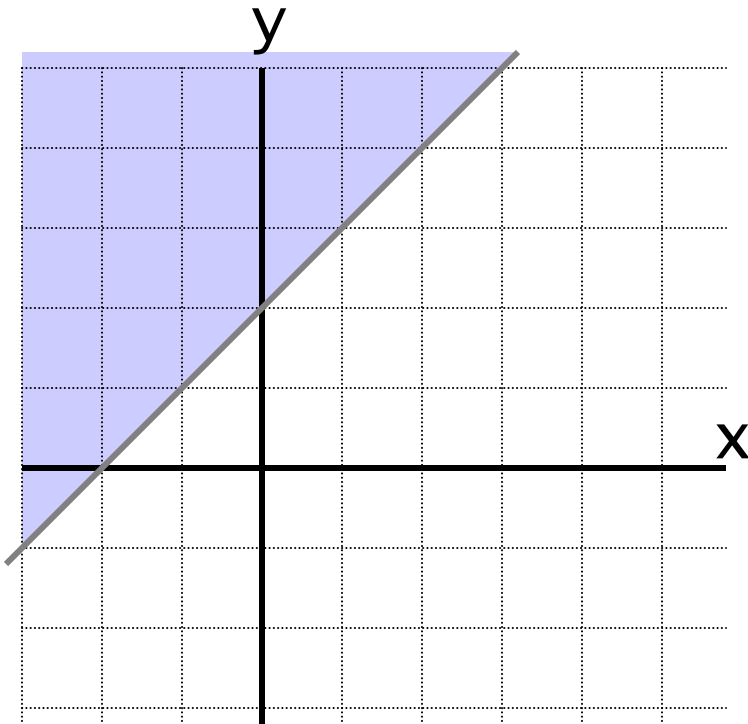


		j				
		1	2	3	4	5
i	1	0	0	1	1	1
	2	0	0	0	1	1
	3	0	0	0	0	1
	4	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0

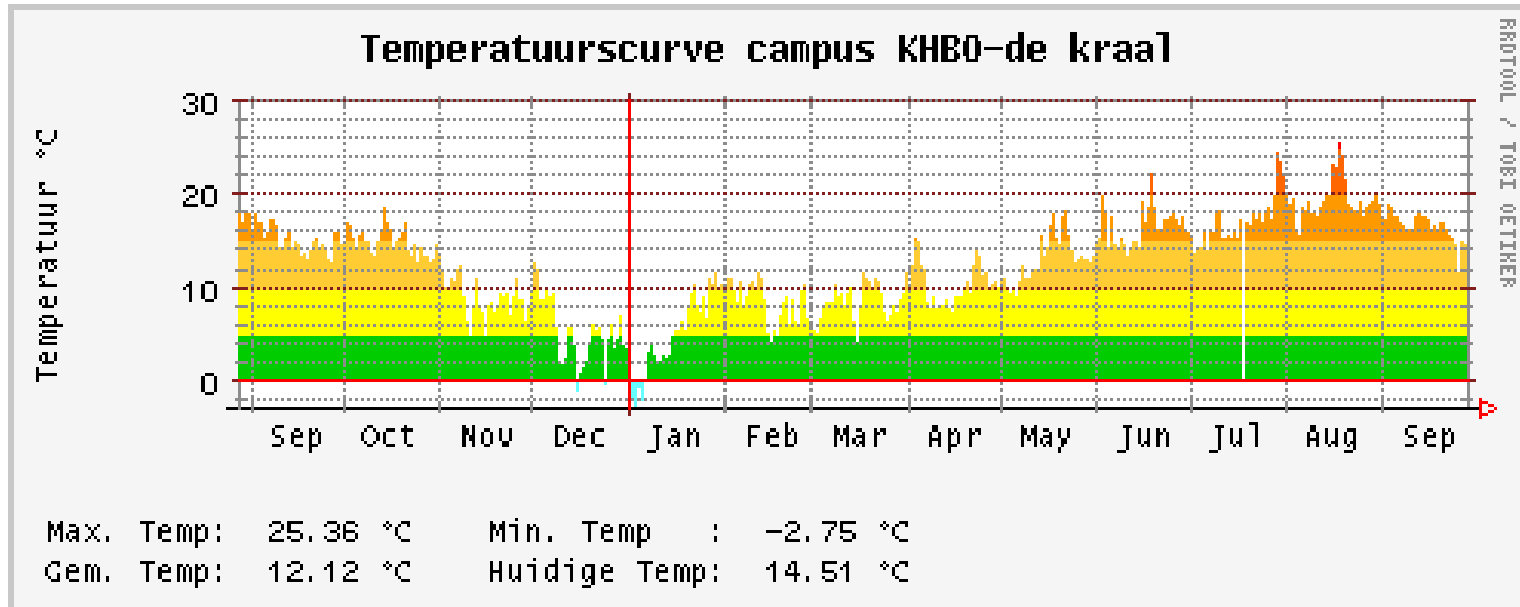
in \mathbb{R}^2 :

$$E = \{ (x, y) \mid y \geq x + 2 \}$$

$$C = \{ (x, y) \mid (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \}$$



temperatuur



$$(d, T_d) \quad d \in \{ 28.8.01, \dots, 30.9.02 \}$$
$$T_d \in \mathbb{R}$$

cijferlijst

v	<i>stnr</i>	<i>cuco</i>	<i>cf</i>
8303	M250	7	
8303	T350	8	
4722	B140	7	
4722	S570	10	
4722	T480	9	
0347	M250	6	
4948	B140	9	
4948	M250	9	
1576	C250	7	
9594	T250	6	
9352	U161	9	
2592	A470	8	
2592	M350	9	
2592	V400	6	

$stnr \ S = \{ 0000, \dots, 9999 \}$
 $cuco \ C = \{ A000, \dots, Z999 \}$
 $cf \ \ J = \{ 0, 1, \dots, 9, 10 \}$

$V = \{ (8303, M250, 7),$
 $(8303, T350, 8),$
 \dots
 $(2592, V400, 6) \}$

$V \subseteq S \times C \times J$

§2.2 n-tupels & producten

(a_1, a_2, \dots, a_n) n-tupel

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$$

volgorde: geordend rijtje

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$\text{desda} \text{ls } a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

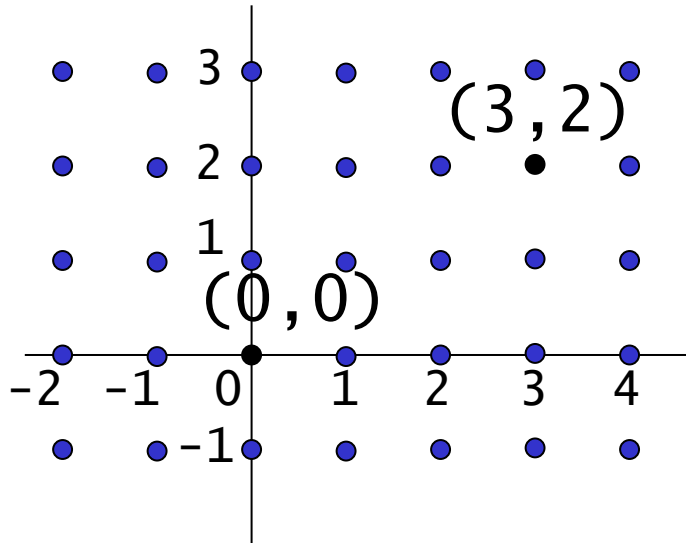
Cartesisch product $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

(geordend) paar (a, b)
product $A \times B$

$$A^2 = A \times A \quad A^n$$

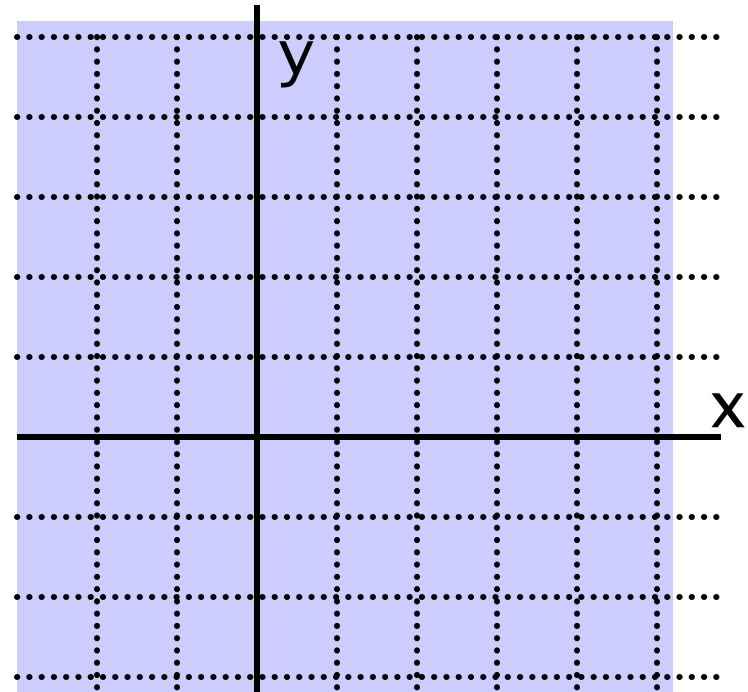
rooster vs. vlak

rooster



$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2 =$$
$$\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \}$$

vlak

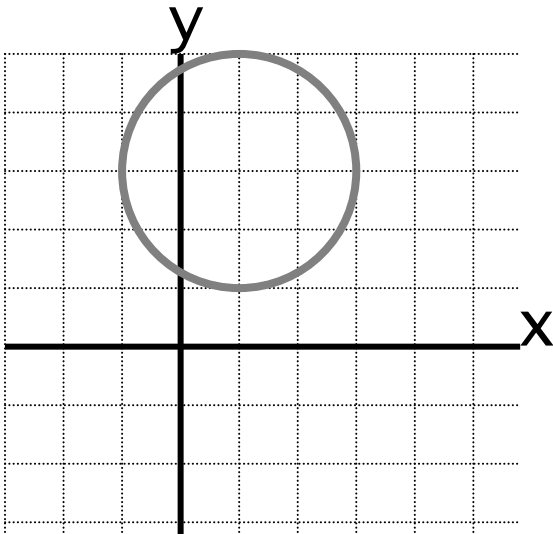


$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 =$$
$$\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

\mathbb{R}^3 ruimte ...

§2.3 relaties

relatie $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$



$$V = \{ (8303, M250, 7), \\ (8303, T350, 8), \\ \dots \\ (2592, v400, 6) \}$$

$$\{ (0, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 2), \\ (1, 1, 2), (0, 3, 3), (1, 2, 3), \\ (0, 4, 4), (1, 3, 4), (2, 2, 4), \\ (0, 5, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 5), \dots \}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid x+y=z \}$$

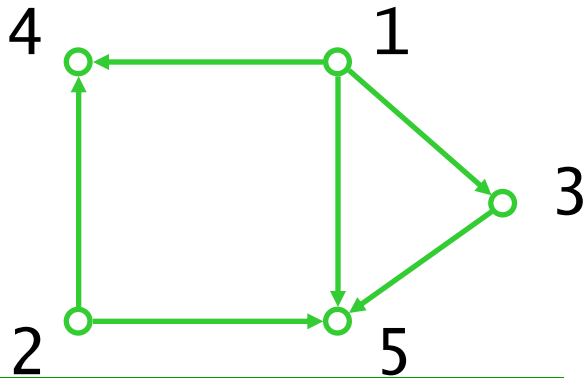
lege relatie

binair relatie $R \subseteq A \times B$

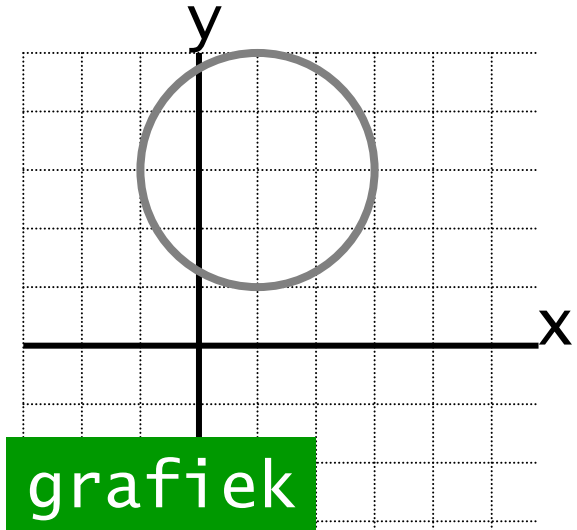
$$aRb \quad (a, b) \in R$$

relatie *in* A

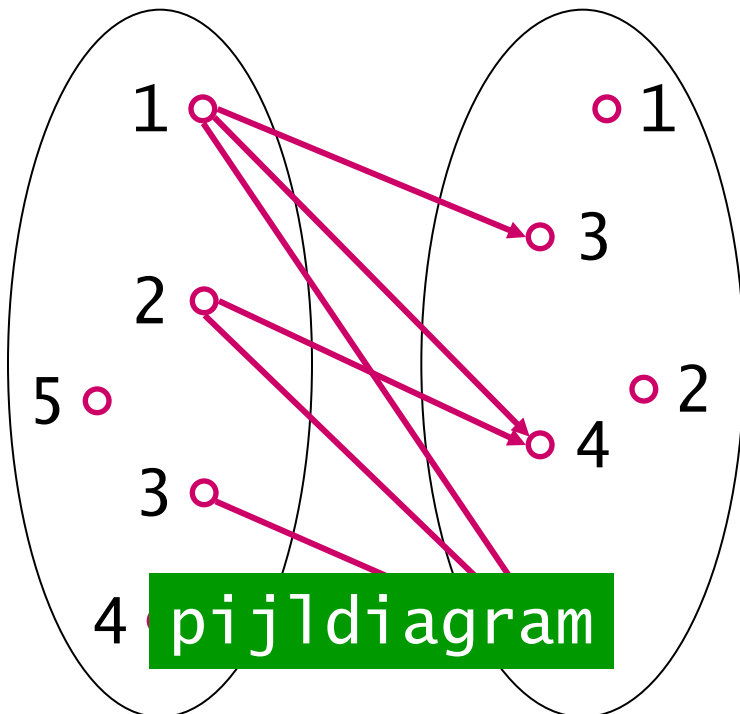
§2.4 representaties



gerichte graaf



grafiek

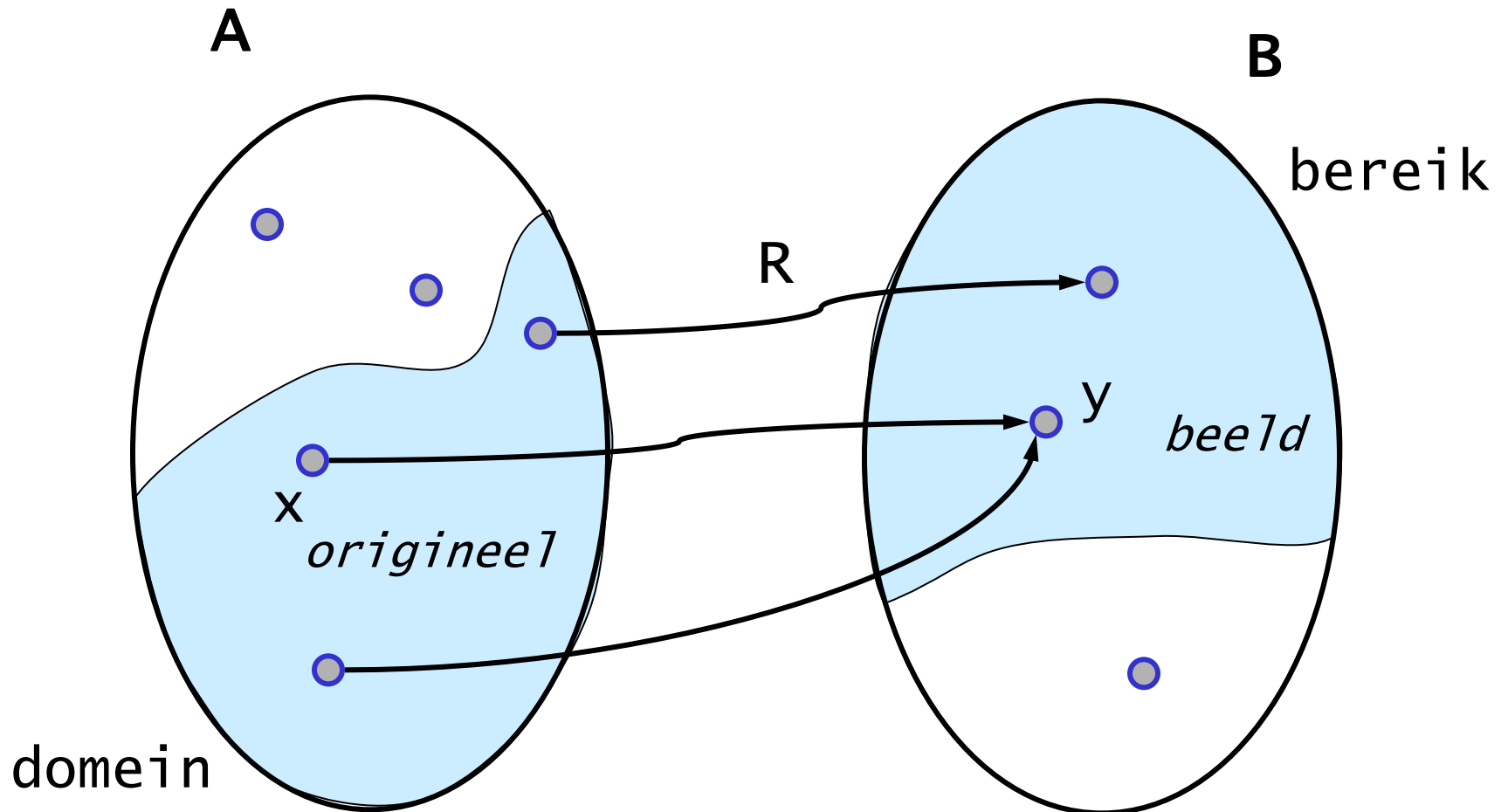


pijl diagram

		j				
		1	2	3	4	5
i	1	0	0	1	1	1
	2	0	0	0	1	1
	3	0	0	0	0	1
	4	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0

matrix

domein & bereik



$$R \subseteq A \times B$$

domein & bereik

begrippen **domein** en **bereik** worden soms op twee manieren gebruikt (en de docent doet daar vrolijk aan mee, helaas)

voor de relatie $R \subseteq A \times B$

is *formeel* het **domein** de verzameling

$$\text{dom}(R) = \{ x \in A \mid \text{er is een } y \in B \text{ met } xRy \}$$

dwz. de punten “waar pijlen vertrekken”

slordiger noemen we soms A het domein

idem voor **bereik** (*range*)

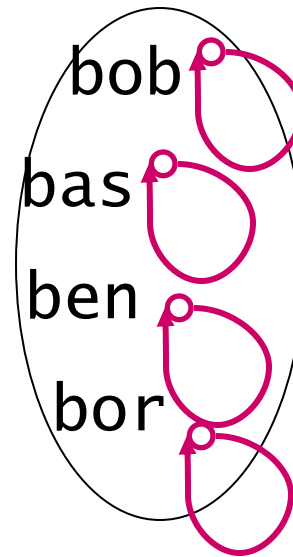
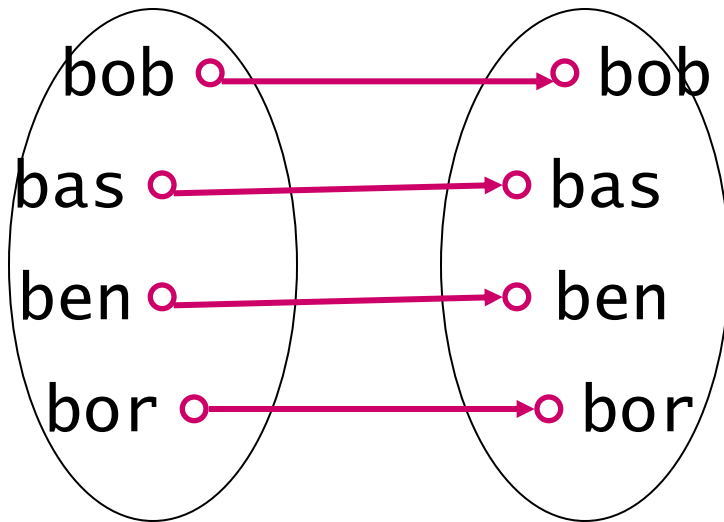
$$\text{ran}(R) = \{ y \in B \mid \text{er is een } x \in A \text{ met } xRy \}$$

als xRy heten x en y vaak **origineel** en **beeld**, net als bij functies

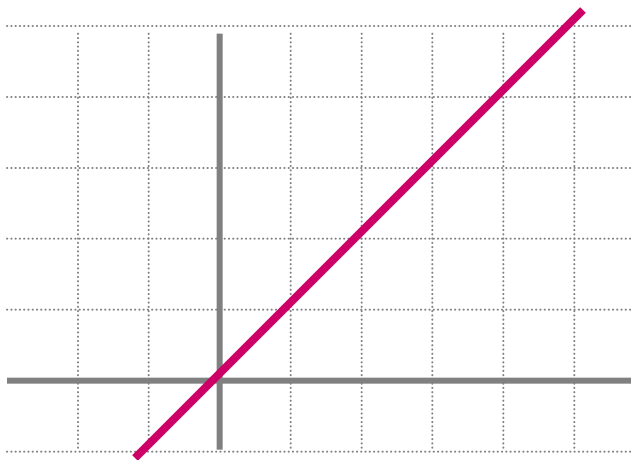
identiteit

$$R = \{ (x, x) \mid x \in A \}$$

gelijkheid, identiteit, diagonaal id_A 1_A Δ_A

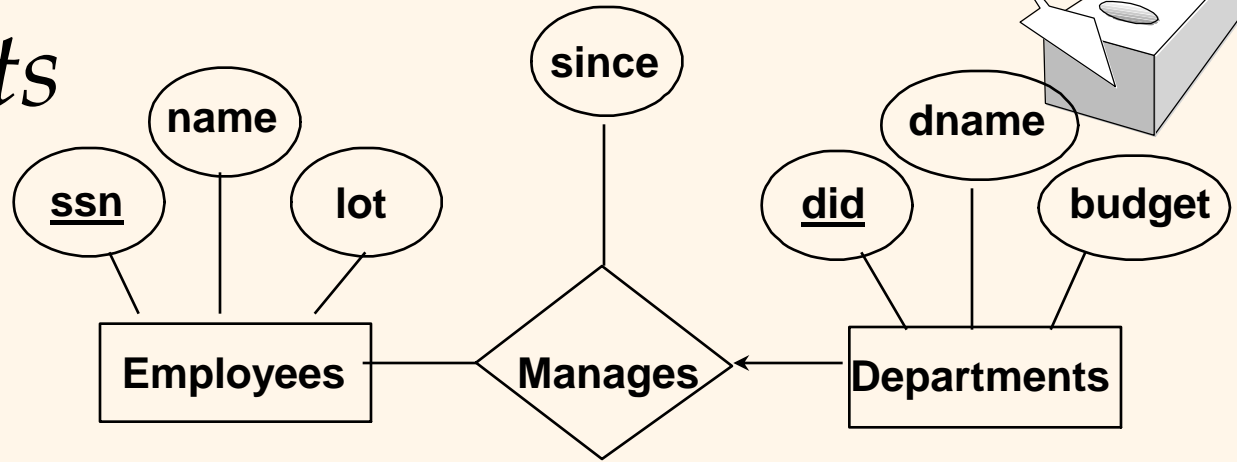


	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1



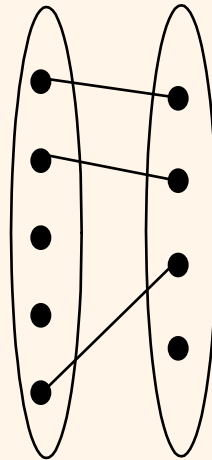
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Key Constraints

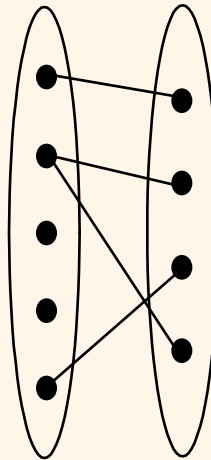


❖ Consider Works_In:
An employee can work in many departments; a dept can have many employees.

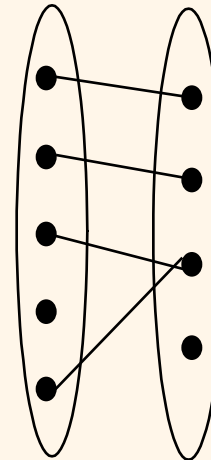
❖ In contrast, each dept has at most one manager, according to the key constraint on Manages.



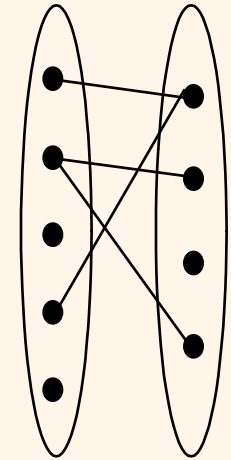
1-to-1



1-to Many



Many-to-1



Many-to-Many

relatie-typen

$$R \subseteq A \times B$$

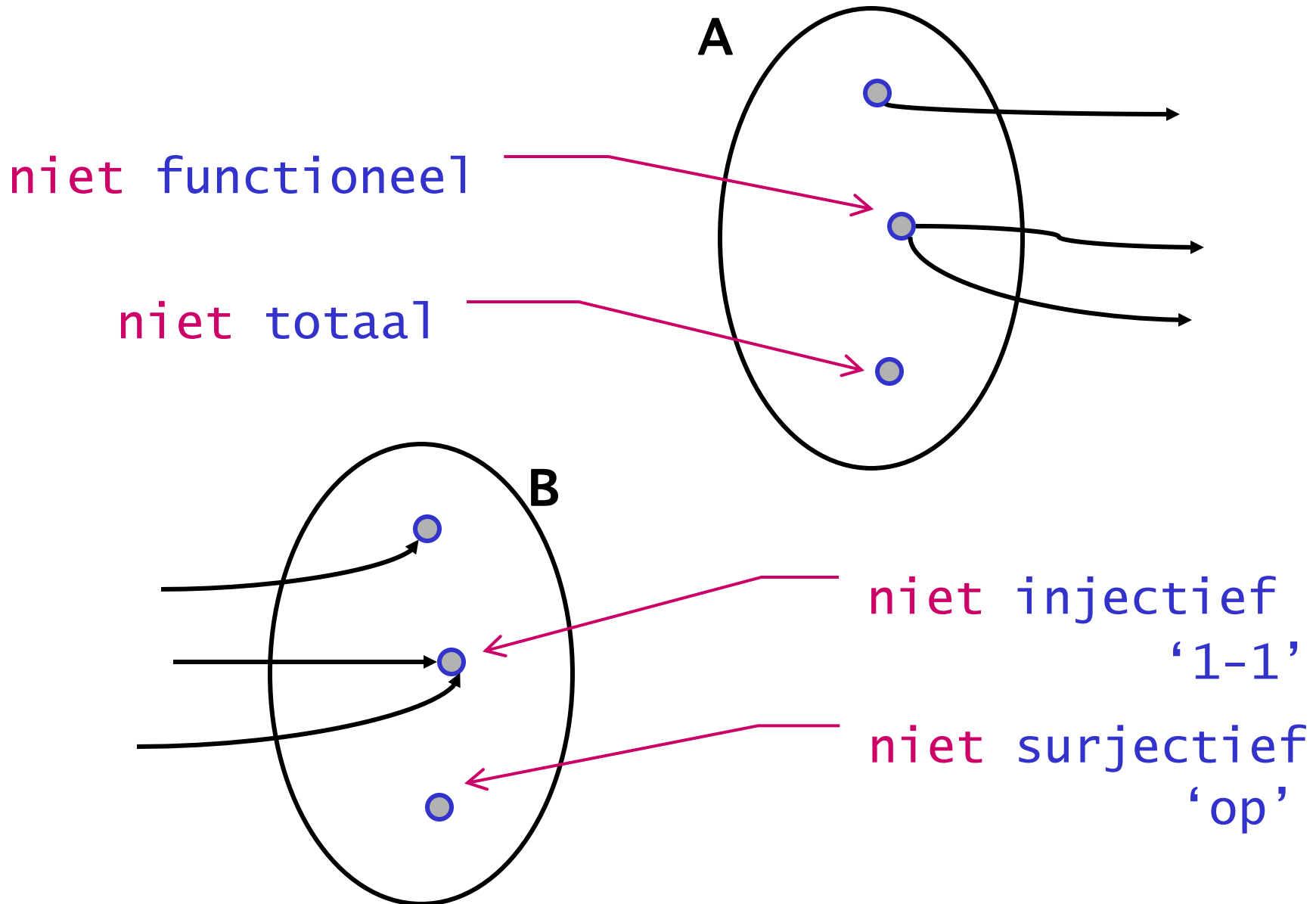
R heet **functioneel** als voor elke $x \in A$ er ten hoogste één $y \in B$ is met xRy

R heet **totaal** als voor elke $x \in A$ er ten minste één $y \in B$ is met xRy

R heet **injectief** als voor elke $y \in B$ er ten hoogste één $x \in A$ is met xRy

R heet **surjectief** als voor elke $y \in B$ er ten minste één $x \in A$ is met xRy

relatie-typen

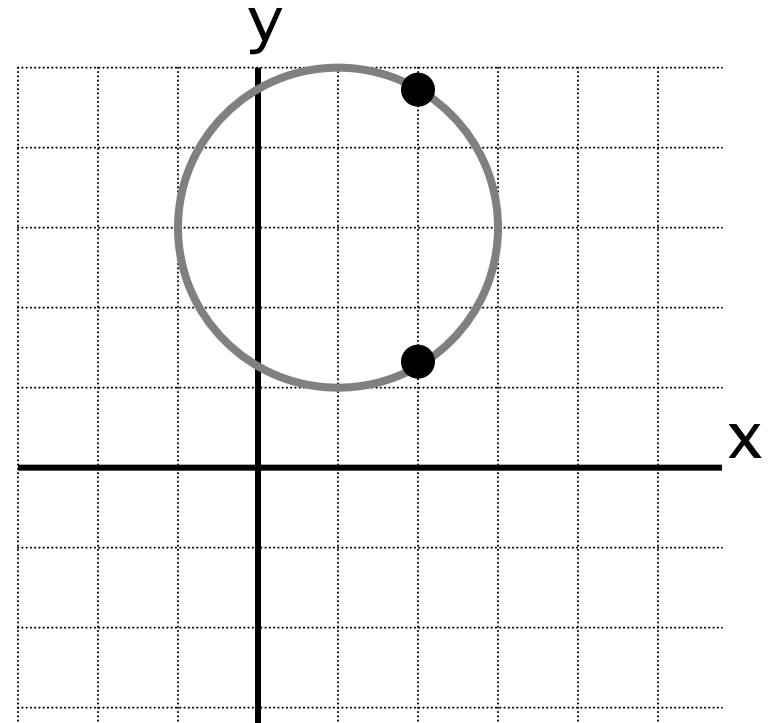
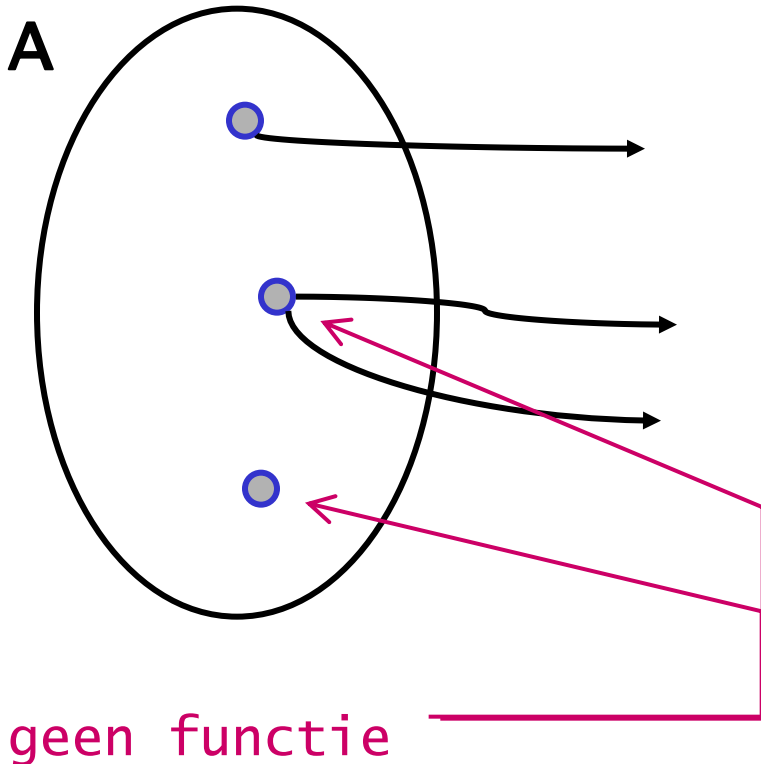


functies chap.3

functie van A naar B als voor iedere $x \in A$ er **precies één** $y \in B$ bestaat waarvoor xRy .

totaal & functioneel

$$f: A \rightarrow B \quad y = f(x)$$



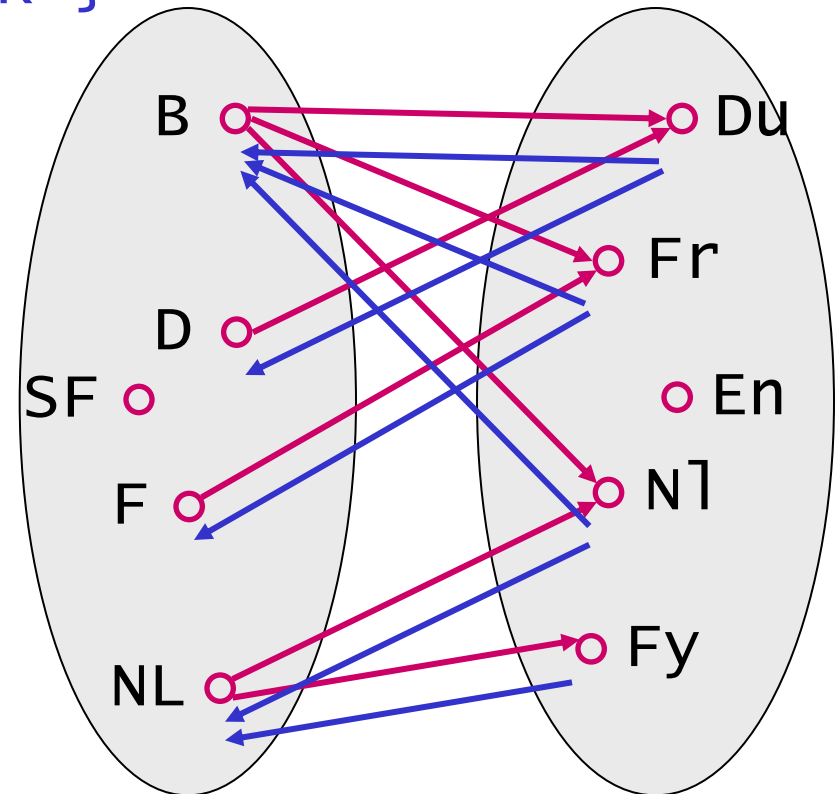
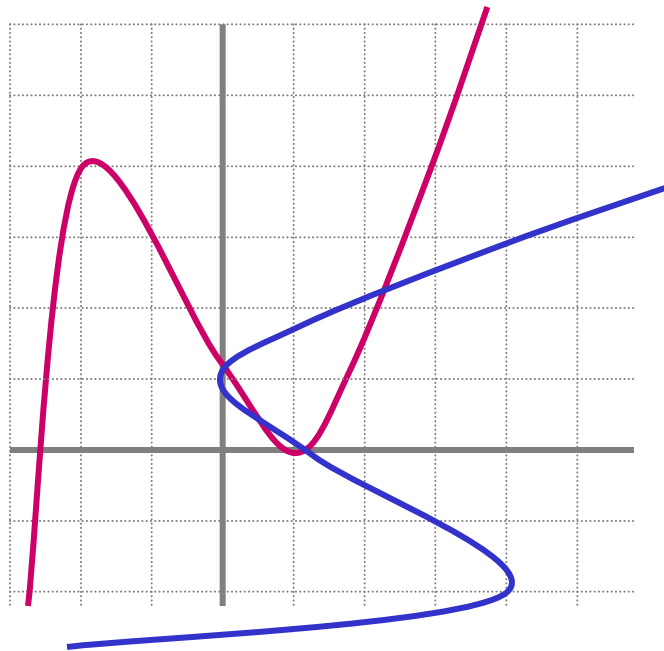
inverse

$$R \subseteq A \times B$$

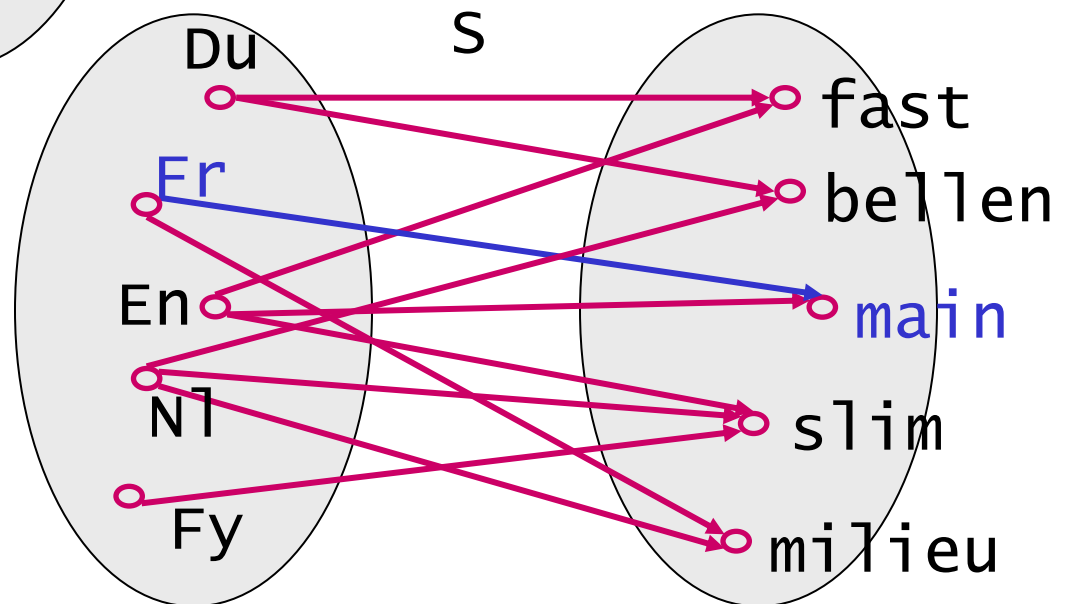
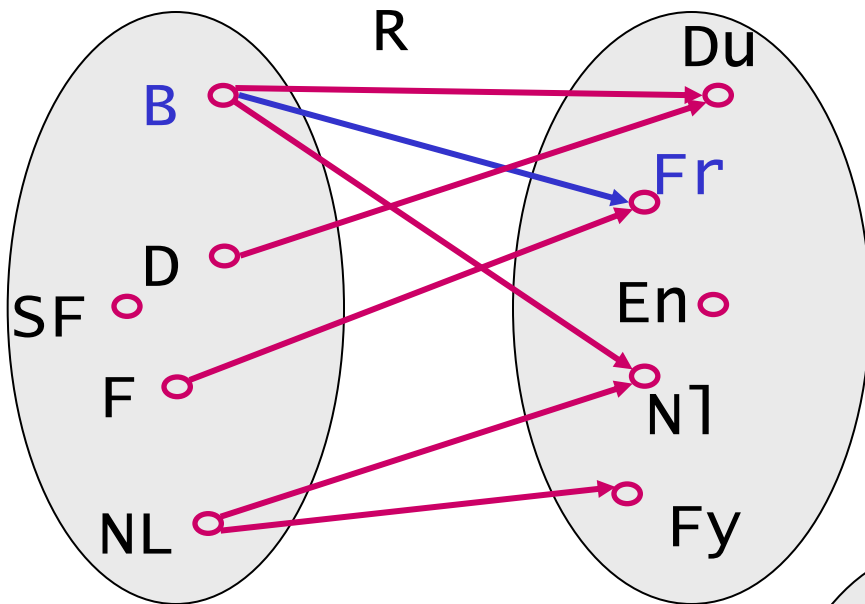
$R^{-1} \subseteq B \times A$ *inverse relatie*

$bR^{-1}a$ desda aRb .

$$R^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in R \}$$



§2.5 samenstelling



samenstellen relaties

voorbeeld databases

persoon -> (straat, nr) postcode

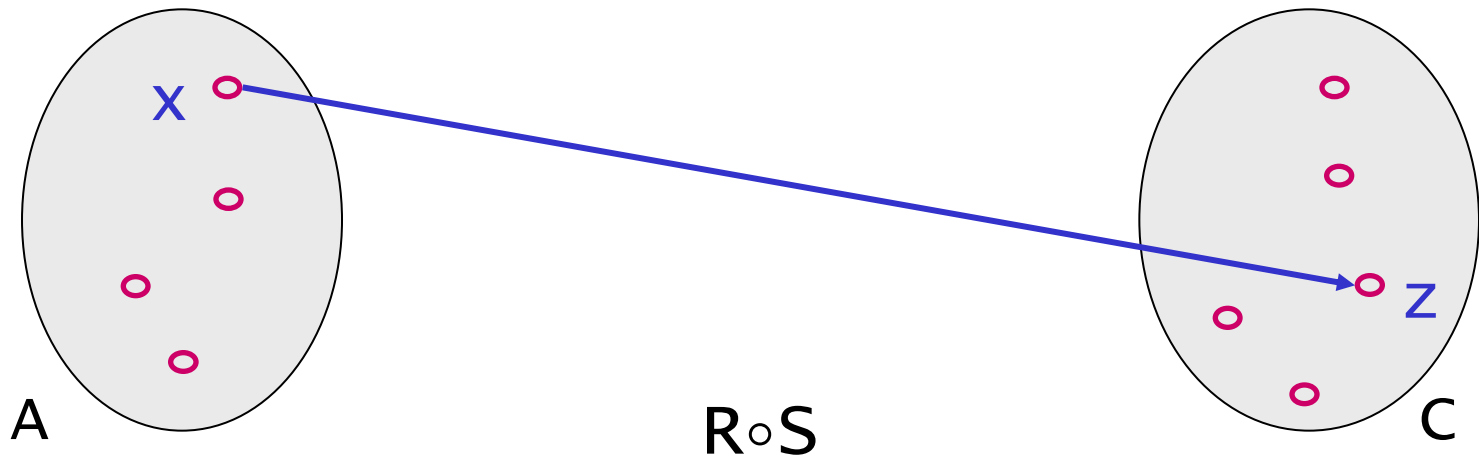
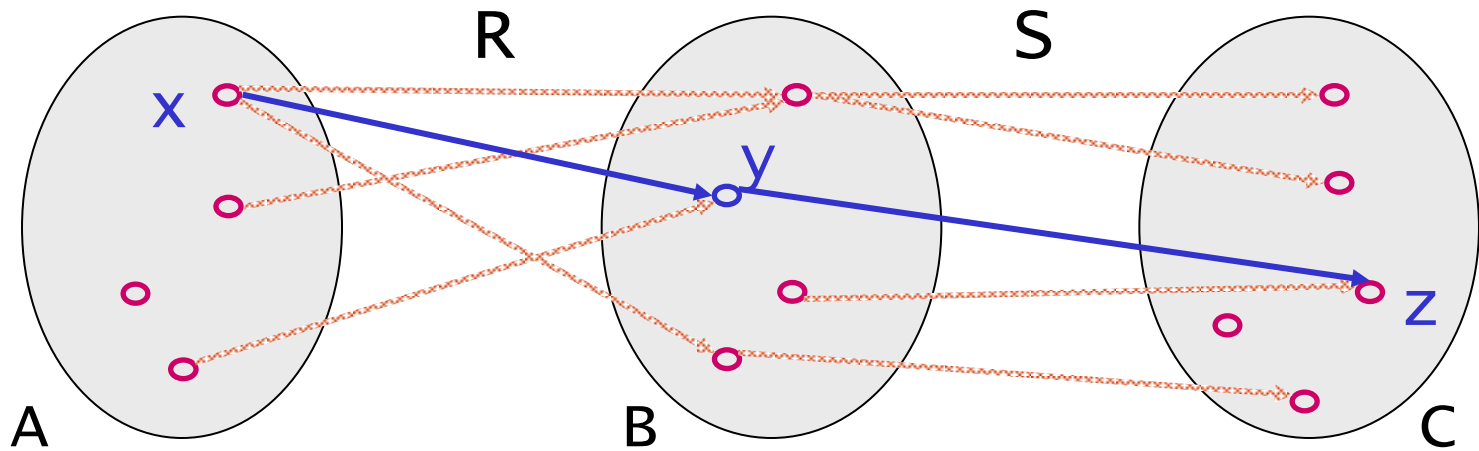
postcode -> plaatsnaam

om het adres te weten moeten we de plaatsnaam bepalen door twee relaties samen te stellen

deze relaties zijn helaas functioneel
(dus niet zo algemeen als we hier willen)

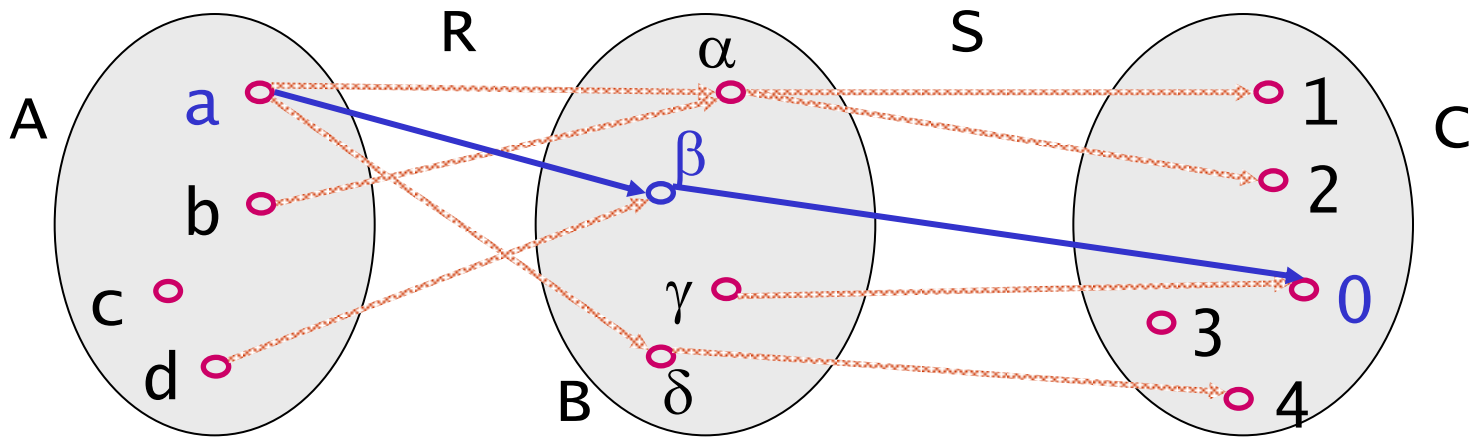
samenstelling

$R \subseteq A \times B$ en $S \subseteq B \times C$, $x \in A$, $z \in C$
 $x(R \circ S)z$ desdaals xRy en ySz voor een $y \in B$



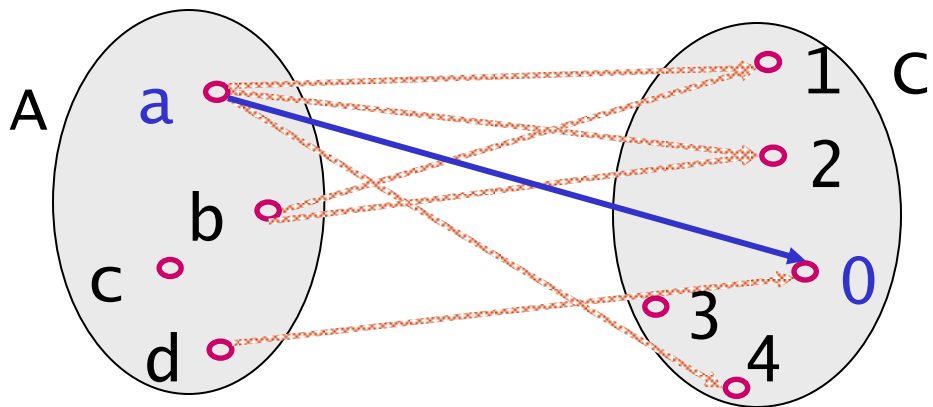
samenstelling

$R \subseteq A \times B$ en $S \subseteq B \times C$, $x \in A$, $z \in C$
 $x(R \circ S)z$ desda's xRy en ySz voor een $y \in B$

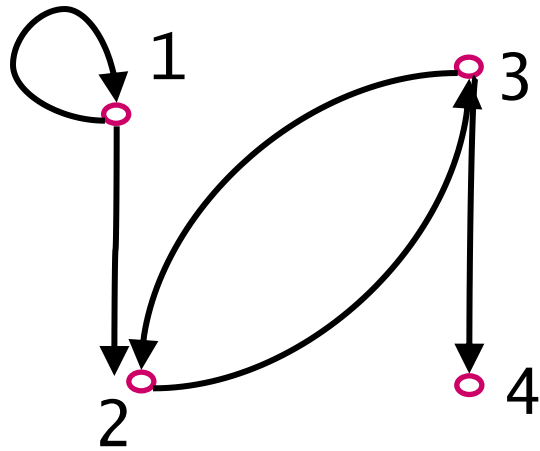


$$R = \{ (a, \alpha), (a, \beta), (a, \delta), (b, \alpha), (d, \beta) \}$$

$$S = \{ (\alpha, 1), (\alpha, 2), (\beta, 0), (\gamma, 0), (\delta, 4) \}$$



$$R \circ S = \{ (a, 0), (a, 1), (a, 2), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (d, 0) \}$$



$$R \circ R = R^2 =$$

$$\{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,4), (3,3) \}$$

$$R^{-1} \circ R =$$

$$\{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,2), (4,4) \}$$

matrixvermenigvuldiging

$R \subseteq A \times B$ en $S \subseteq B \times C$, $x \in A$, $z \in C$

$x(S \circ R)z$ als er een $y \in B$ is waarvoor xRy en ySz

	Du	En	Fr	Fy	Nl
B	x	x			x
D	x				
F			x		
NL				x	x
SF					

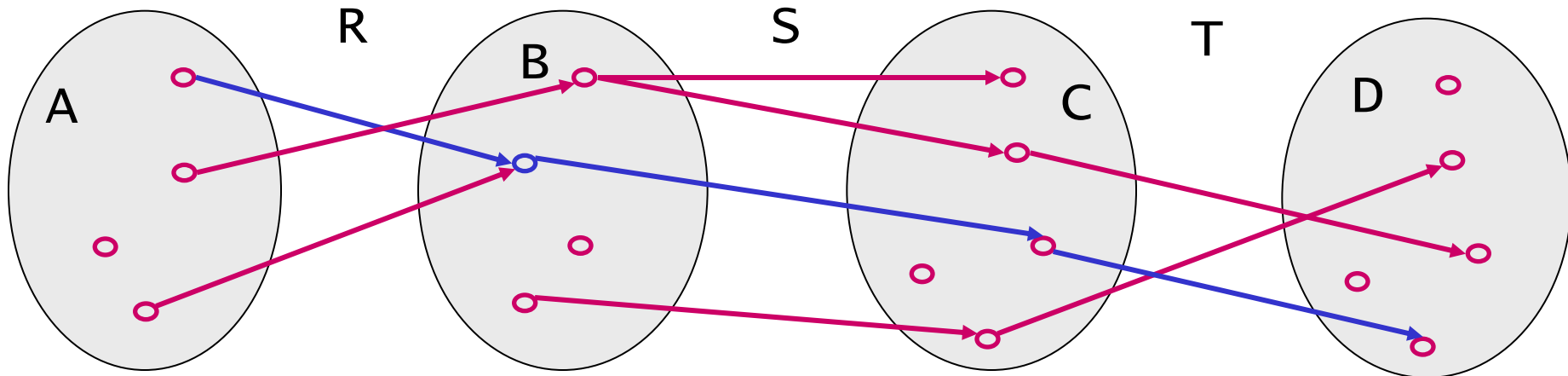
	fast	main	slim	milieu	bellen
Du	x	x			x
En	x	x	x		
Fr		x		x	
Fy			x		
Nl			x	x	x

	fast	main	slim	milieu	bellen
B	x	x	x	x	x
D	x				x
F		x		x	
NL			x	x	x
SF					

associativiteit

Theorem 2.1

samenstellen van relaties is associatief:
als $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ en $T \subseteq C \times D$,
dan $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.



volgorde !?

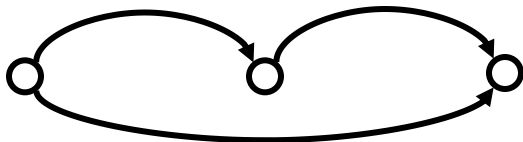
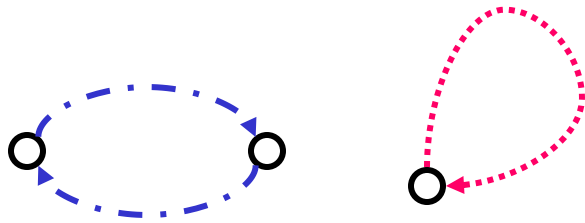
$$x \xrightarrow{R \circ S} y$$

$$y = \overleftarrow{g \circ f}(x)$$

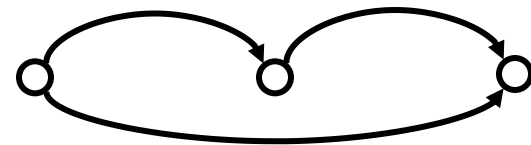
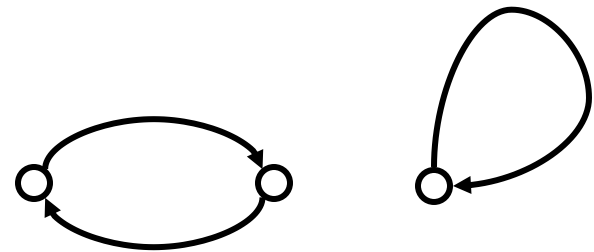
§2.6 eigenschappen (van relaties)



kleiner (-gelijk)



gelijke kleur



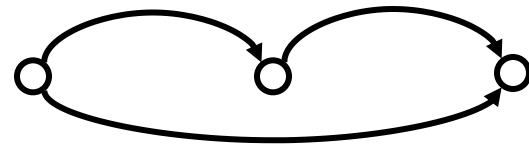
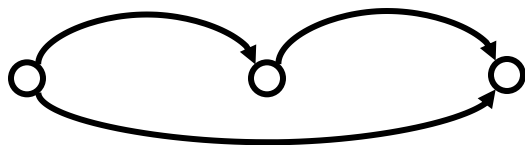
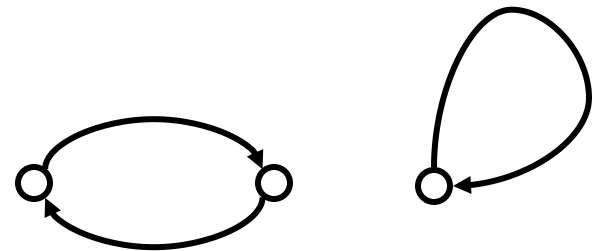
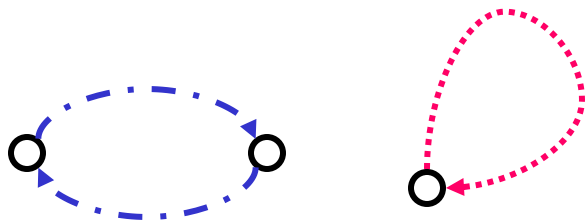
§2.6 eigenschappen (van relaties)

er zijn twee typen relaties

(**equivalentierelatie**, **partiële ordening** zie volgende paragrafen van Schaum) die vaak voorkomen.

de karakteristieken liggen vast met behulp van de relatie tussen één, twee en drie objecten:

(**ir**)**reflexiviteit**, (**a**)**symmetrie**, en **transitiviteit**.



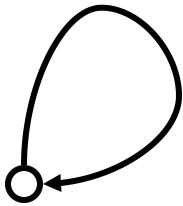
partiële ordening

equivalentierelatie,

reflexief

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet

- *reflexief* als xRx voor alle $x \in V$
- *irreflexief* als xRx voor geen $x \in V$

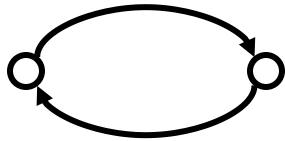


\mathbb{Z}	$x \leq y$	R
\mathbb{Z}	$x < y$	IR
$\mathcal{P}(U)$	$x \cap y = \emptyset$	
$\mathcal{P}(U)$	$x \subset y$	IR
V	$x = y$	R
\mathbb{Z}^+	$2x \geq y$	R
	'gelijke kleur'	R

symmetrisch

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet

- *symmetrisch* als xRy impliceert dat yRx
(voor alle $x, y \in V$)
- *anti-symmetrisch* als xRy en yRx impliceren dat $x=y$
(voor alle $x, y \in V$)

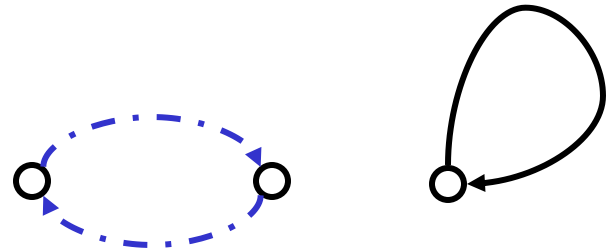


\mathbb{Z}	$x \leq y$	AS
\mathbb{Z}	$x < y$	AS (!)
$\mathcal{P}(U)$	$x \cap y = \emptyset$	S
$\mathcal{P}(U)$	$x \subset y$	
V	$x = y$	S AS
\mathbb{Z}^+	$2x \geq y$	
	'gelijke kleur'	S

symmetrisch

symmetrisch: wanneer tussen twee punten de pijl in de ene richting loopt dan ook omgekeerd

antisymmetrisch: tussen twee punten loopt nooit een pijl in twee richtingen, *tenzij* die punten samenvallen (en het dus over dezelfde pijl gaat)



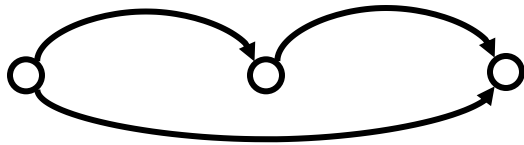
“ als xRy en yRx gelden, dan $x=y$ ”

let op: zowel \leq als $<$ is een antisymmetrische relatie, idem \subseteq en \subset .

transitief

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet

- *transitief* als xRy en yRz impliceren dat xRz
(voor alle $x, y, z \in V$)



\mathbb{Z}	$x \leq y$	T
\mathbb{Z}	$x < y$	T
$\mathcal{P}(U)$	$x \cap y = \emptyset$	
$\mathcal{P}(U)$	$x \subset y$	T
V	$x = y$	T
\mathbb{Z}^+	$2x \geq y$	
	‘gelijke kleur’	T

binaire relatie $R \subseteq A \times A$

R reflexief $\Leftrightarrow \text{id} \subseteq R$

R symmetrisch $\Leftrightarrow R^{-1} \subseteq R$

R transitief $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$
 $\Leftrightarrow R^n \subseteq R$ voor alle $n \in \mathbb{N}^+$

Theorem 2.2

binaire relatie $R \subseteq A \times B$

R functioneel $\Leftrightarrow R^{-1} \circ R \subseteq \text{id}_B$

R injectief $\Leftrightarrow R \circ R^{-1} \subseteq \text{id}_A$

twee manieren om hetzelfde uit te drukken

R reflexief $\Leftrightarrow \text{id} \subseteq R$

id is de relatie $\{ (x,x) \mid x \text{ in } A \}$

reflexief als (x,x) in R voor alle x in A
oftewel als id geheel in R zit

R symmetrisch $\Leftrightarrow R^{-1} \subseteq R$

R^{-1} is de relatie $\{ (y,x) \mid (x,y) \text{ in } R \}$

reflexief: als (x,y) in R dan ook (y,x) in R
oftewel als R^{-1} geheel in R zit

R transitief $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

R^2 is de relatie $\{ (x,z) \mid (x,y) \text{ en } (y,z) \text{ in } R \}$

transitief: als (x,y) en (y,z) in R dan ook (x,z) in R
dat zijn precies de paren die in R^2 zitten

binaire relatie $R \subseteq A \times A$

$$R \text{ irreflexief} \Leftrightarrow \text{id} \cap R = \emptyset$$

$$R \text{ antisymmetrisch} \Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \text{id}$$

$$\begin{aligned} R \text{ transitief} &\Leftrightarrow R^2 \subseteq R \\ &\Leftrightarrow R^n \subseteq R \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

binaire relatie $R \subseteq A \times B$

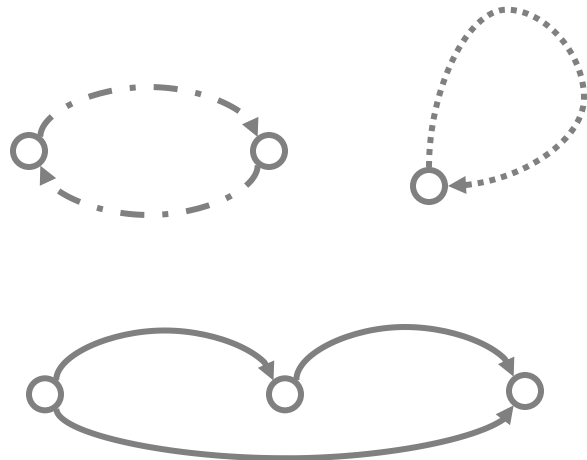
$$R \text{ surjectief} \Leftrightarrow R^{-1} \circ R \supseteq \text{id}_B$$

$$R \text{ totaal} \Leftrightarrow R \circ R^{-1} \supseteq \text{id}_A$$

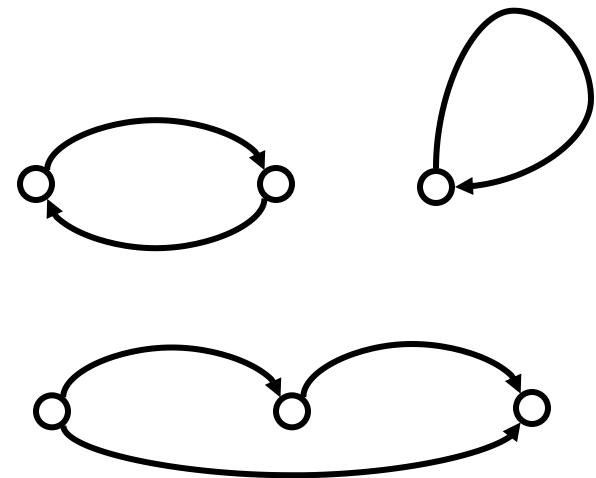
§2.8 equivalentierelaties



kleiner (-gelijk)



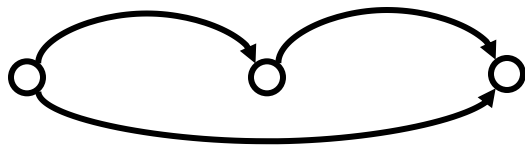
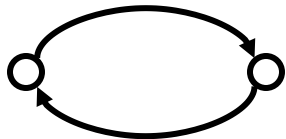
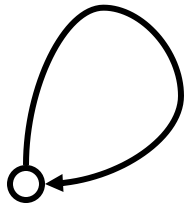
gelijke kleur



equivalentierelatie

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet *equivalentierelatie* als

- *reflexief* xRx (alle $x \in V$)
- *symmetrisch* als xRy dan yRx (alle $x, y \in V$)
- *transitief* als xRy en yRz dan xRz (alle $x, y, z \in V$)



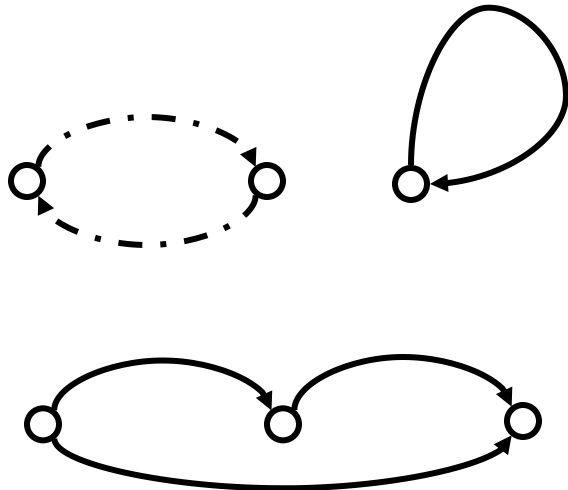
\mathbb{Z}	$x \leq y$	R	AS	T
\mathbb{Z}	$x < y$	IR	AS	T
$\mathcal{P}(U)$	$x \cap y = \emptyset$		S	
$\mathcal{P}(U)$	$x \subset y$	IR		T
V	$x = y$	R	S AS	T
\mathbb{Z}^+	$2x \geq y$	R		
	'gelijke kleur'	R	S	T

- evenwijdig
- gelijkvormig

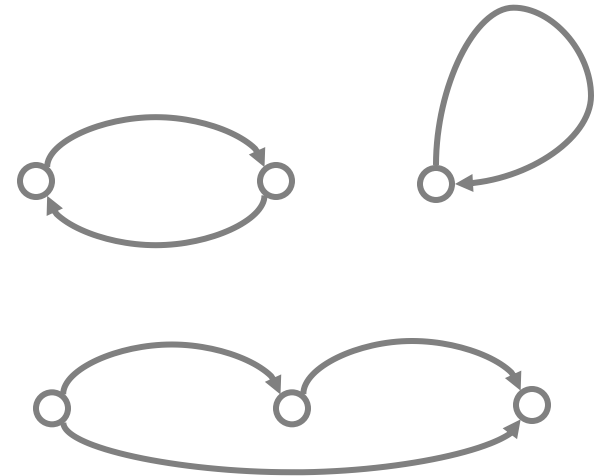
§2.9 partiële ordeningen



kleiner-gelijk



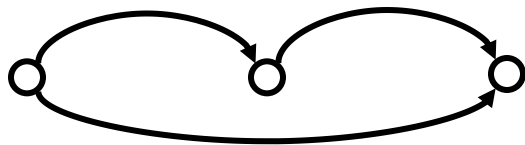
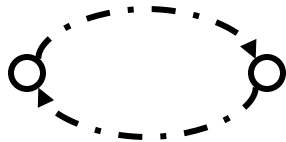
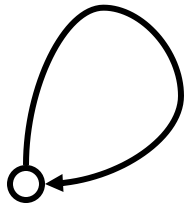
gelijke kleur



partiële ordening

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet *partiële ordening* als

- *reflexief* xRx
- *antisymmetrisch* als xRy en yRx dan $x=y$
- *transitief* als xRy en yRz dan xRz



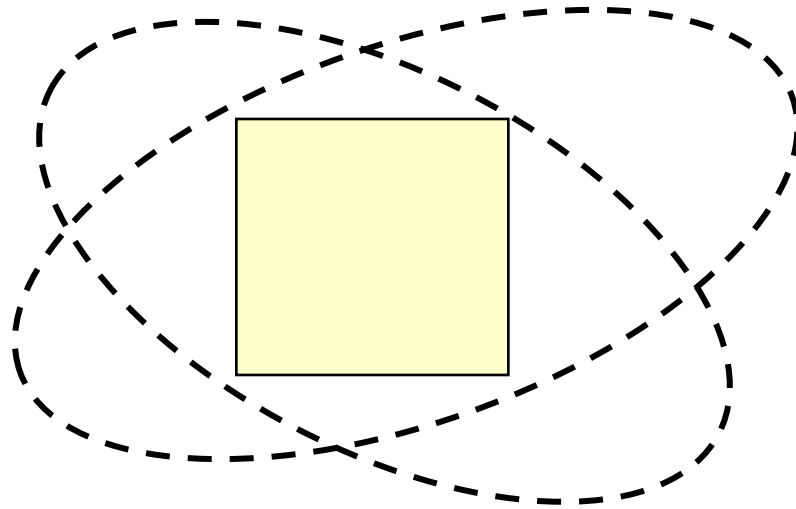
\mathbb{Z}	$x \leq y$	R	AS	T
\mathbb{Z}	$x < y$	IR	AS	T
$\mathcal{P}(U)$	$x \cap y = \emptyset$		S	
$\mathcal{P}(U)$	$x \subset y$	IR		T
V	$x = y$	R	S AS	T
\mathbb{Z}^+	$2x \geq y$	R		
'gelijke kleur'		R	S	T

- deelverzameling
- deler (op \mathbb{N})

§2.7 afsluiting

eigenschap P P-afsluiting
kleinste relatie (met eigenschap P) die R omvat

‘zo weinig mogelijk toevoegen’
bestaat er wel een kleinste ?



stelling

doorsnede van *transitieve* relaties is *transitief*

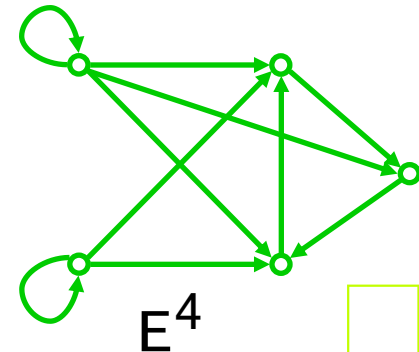
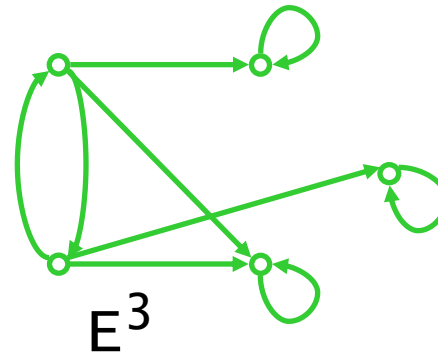
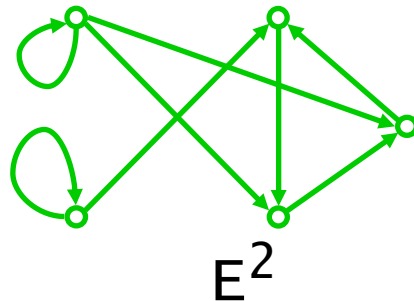
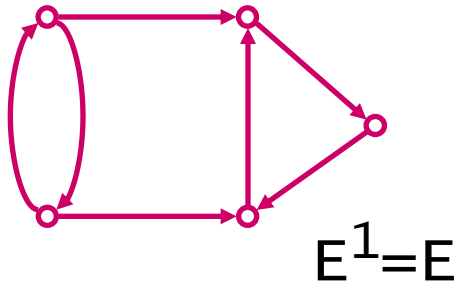
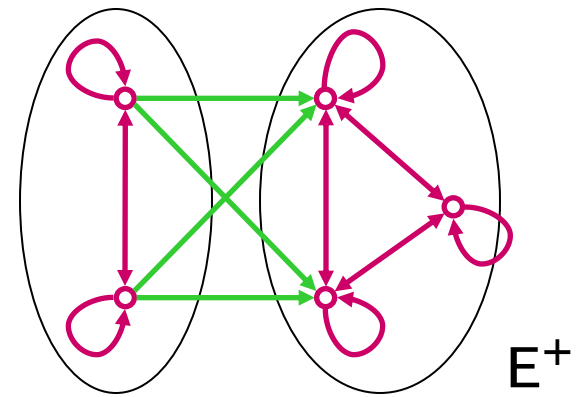
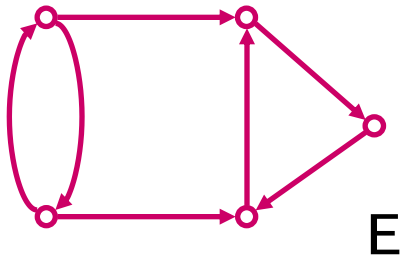
(willekeurig veel)

transitieve afsluiting

Laat $R \subseteq A \times A$ een relatie zijn. We definiëren:
 $R^0 = 1_A$, $R^1 = R$, $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n \times}$, voor $n \geq 2$.

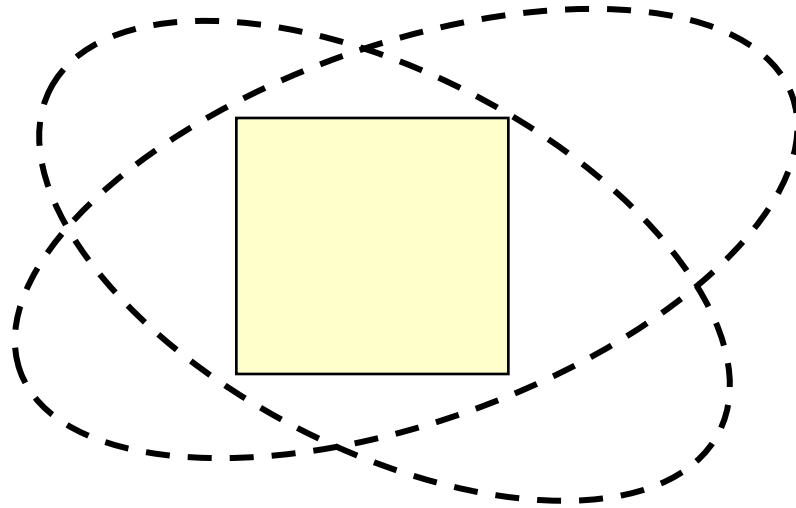
transitieve afsluiting $R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$

n-staps wandelingen

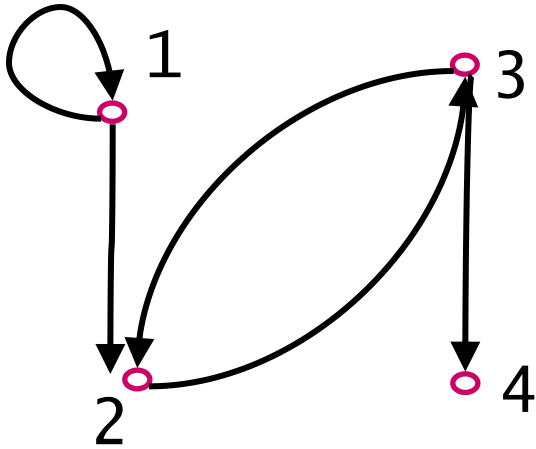


afsluiting: alternatieven

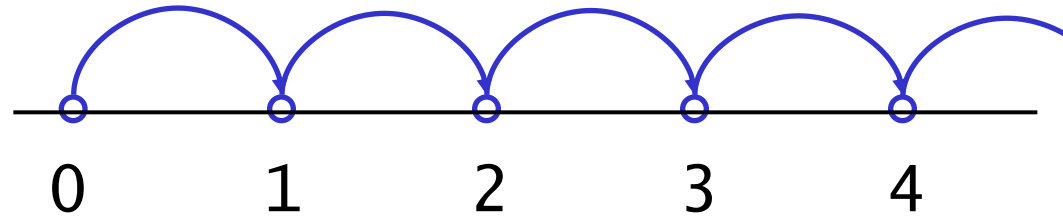
- *transitieve afsluiting* $R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$
- kleinste **transitieve** relatie R' met $R \subseteq R'$



top down vs. bottom up



$$R^+ = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4) \}$$



$$R = \{ (n, n+1) \mid n \in \mathbb{N} \} \quad \text{' +1' }$$

$$R^k = \{ (n, n+k) \mid n \in \mathbb{N} \} \quad \text{' +k' }$$

$$R^+ = \{ (n, n+k) \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^+ \} \quad \text{' <' }$$

binaire relatie $R \subseteq A \times A$

Theorem 2.3

reflexieve afsluiting $R \cup \text{id}$

symmetrische afsluiting $R \cup R^{-1}$

transitieve afsluiting R^+

end...