ALGORITMIEK: antwoorden werkcollege 10

Problem 1.
a. The all-matrix version: Repeat the following operation n times. Select the smallest element in the unmarked rows and columns of the cost matrix and then mark its row and column.
The row-by-row version: Starting with the first row and ending with the last row of the cost matrix, select the smallest element in that row which is not in a previously marked column. After such an element has been selected, mark its column to prevent selecting another element from the same column.
b. Neither of the two versions always yields an optimal solution. The following cost matrix is a simple counterexample:

	job 1	job 2
Anna	1	2
Bob	2	100

Problem 2.
a. Let 1, 2, 5 and 10 be labels representing the men from the problem, and let f represent the flashlight's location. The following sequence of states solves the problem:

left side	time elapsed	right side
$1, 2, 5, 10, f$	0	
$5, 10$	2	$1, 2, f$
$1, 5, 10, f$	3	2
1	13	$2, 5, 10, f$
$1, 2, f$	15	$5, 10$
	17	$1, 2, 5, 10, f$

b. Repeat the following steps $n-2$ times: Send to the other side the pair of two fastest remaining persons and then return the flashlight with the (single) fastest person. Finally, send the remaining two people together. The total crossing time will be equal to

$$(t_2 + t_1) + (t_3 + t_1) + \cdots + (t_{n-1} + t_1) + t_n = \sum_{i=2}^{n} t_i + (n-2) \cdot t_1 = \sum_{i=1}^{n} t_i + (n-3) \cdot t_1$$

The solution to the instance from part **a.** shows that this greedy algorithm does not always yield the minimal crossing time for $n > 3$. No smaller counterexample can be given, as a simple exhaustive check for $n = 3$ demonstrates. (The obvious solution for $n = 2$ is the one generated by the greedy algorithm as well.)
Note: for an algorithm that always yields a minimal crossing time, see Günter Rote, "Crossing the bridge at night," *EATCS Bulletin*, vol. 78 (October 2002), 241–246.

Opgave 4.
a. Het algoritme van Dijkstra kan gewoon gebruikt worden voor gerichte gewogen grafen. Je moet alleen bij het aflopen van de buren van een zojuist gekozen (aan de boom toegevoegde) knoop rekening houden met de richting van de takken: bekijk alleen de takken **van** de toegevoegde knoop **naar** andere knopen.
b. Begin het algoritme van Dijkstra in een van de twee gegeven knopen, en stop zodra je de andere knoop hebt toegevoegd aan de boom.

Als de graaf gericht is, kan het uitmaken in welk van de twee knopen je begint. Als het niet gespecificeerd is in welke knoop je moet beginnen, kun je twee zoektochten uitvoeren: eerst vanuit de ene knoop en vervolgens vanuit de andere.

c. Als de graaf ongericht is, kun je het algoritme van Dijkstra gewoon beginnen in de gegeven knoop. Daarmee vind je de kortste paden vanuit de gegeven knoop naar alle andere knopen. Vervolgens draai je deze paden om.

Als de graaf gericht is, draai je eerst alle takken in de graaf om. Vervolgens kun je het algoritme van Dijkstra beginnen in de gegeven knoop. Ten slotte draai je, net als in het vorige geval, de hiermee gevonden paden om.

Opgave 5.

a. Met de tabel:

a	b	c	d	e	Actie
0	∞	∞	∞	∞	Begin met a
–	∞	∞	7	∞	Kies d, vanaf a
–	9	12	–	∞	Kies b, vanaf d
–	–	12	–	∞	Kies c, vanaf d
–	–	–	–	18	Kies e, vanaf c

Of in woorden:

Begin met a, afstand 0.

$a \to d$: $0 + 7 = 7$. OK.

Kies d, afstand 7, vanaf a.

$d \to b$: $7 + 2 = 9$. OK.

$d \to c$: $7 + 5 = 12$. OK.

Kies b, afstand 9, vanaf d.

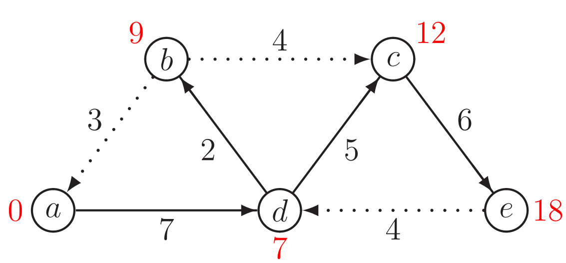
$b \to c$: $9 + 4 = 13 > 12$. X.

Kies c, afstand 12, vanaf d.

$c \to e$: $12 + 6 = 18$. OK.

Kies e, afstand 18, vanaf c.

De hiermee corresponderende boom ziet er als volgt uit:



b. Met de tabel:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	Actie
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	Begin met a
–	3	5	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	Kies b, vanaf a
–	–	5	4	6	9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	Kies d, vanaf a
–	–	5	–	5	9	∞	9	∞	∞	∞	∞	Kies c, vanaf a (of: kies e)
–	–	–	–	5	9	9	9	∞	∞	∞	∞	Kies e, vanaf d
–	–	–	–	–	7	9	9	9	∞	∞	∞	Kies f, vanaf e
–	–	–	–	–	–	9	9	9	12	∞	∞	Kies g, vanaf c (of: kies h of i)
–	–	–	–	–	–	–	9	9	12	15	∞	Kies h, vanaf d (of: kies i)
–	–	–	–	–	–	–	–	9	12	15	∞	Kies i, vanaf e
–	–	–	–	–	–	–	–	–	12	15	14	Kies j, vanaf f
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	15	14	Kies l, vanaf i
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	15	–	Kies k, vanaf g

Of in woorden:

Begin met a, afstand 0.
- $a \to b$: $0 + 3 = 3$. OK.
- $a \to c$: $0 + 5 = 5$. OK.
- $a \to d$: $0 + 4 = 4$. OK.

Kies b, afstand 3, vanaf a.
- $b \to e$: $3 + 3 = 6$. OK.
- $b \to f$: $3 + 6 = 9$. OK.

Kies d, afstand 4, vanaf a.
- $d \to c$: $4 + 2 = 6 > 5$. X.
- $d \to e$: $4 + 1 = 5 < 6$. OK.
- $d \to h$: $4 + 5 = 9$. OK.

Kies c, afstand 5, vanaf a (of: kies e).
- $c \to g$: $5 + 4 = 9$. OK.

Kies e, afstand 5, vanaf d.
- $e \to f$: $5 + 2 = 7 < 9$. OK.
- $e \to i$: $5 + 4 = 9$. OK.

Kies f, afstand 7, vanaf e.
- $f \to j$: $7 + 5 = 12$. OK.

Kies g, afstand 9, vanaf c (of: kies h of i).
- $g \to h$: $9 + 3 = 12 > 9$. X.
- $g \to k$: $9 + 6 = 15$. OK.

Kies h, afstand 9, vanaf d (of: kies i).
- $h \to i$: $9 + 6 = 15 > 9$. X.
- $h \to k$: $9 + 7 = 16 > 15$. X.

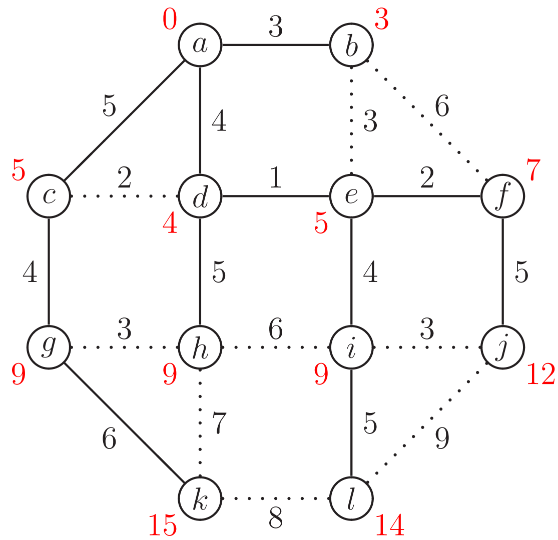
Kies i, afstand 9, vanaf e.
- $i \to j$: $9 + 3 = 12 = 12$. X.
- $i \to l$: $9 + 5 = 14$. OK.

Kies j, afstand 12, vanaf f.
- $j \to l$: $12 + 9 = 21 > 14$. X.

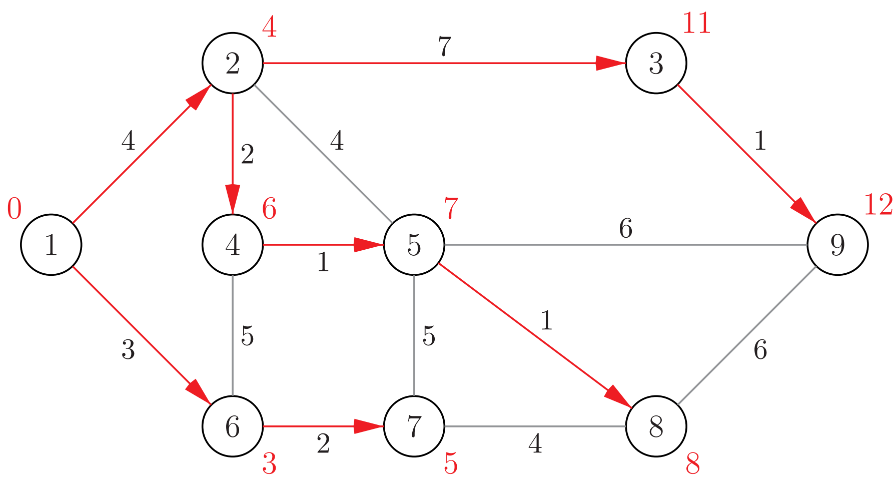
Kies l, afstand 14, vanaf i.
- $l \to k$: $14 + 8 = 22 > 15$. X.

Kies k, afstand 15, vanaf g.

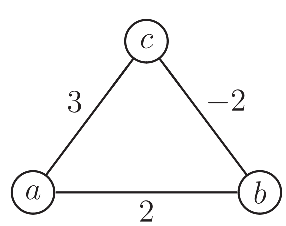
De hiermee corresponderende boom ziet er als volgt uit:



Opgave 6.
De resulterende boom van kortste paden:



Problem 7.
Consider, for example, the graph



As the shortest from a to b, Dijkstra's algorithm yields $a - b$ of length 2, which is longer than $a - c - b$ of length 1.