TENTAMEN LOGICA (I&E)
Donderdag 3 januari 2019, 10.00 – 13.00 uur

Dit tentamen bestaat uit acht opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Als je het antwoord op een onderdeel niet weet, en je hebt dat antwoord nodig bij een later onderdeel, dan kun je het antwoord 'kopen' bij de docent.

Als er bij een opgave gevraagd wordt om iets te controleren, is het van belang dat je ook toelicht waarom je tot een bepaalde conclusie komt.

---

1. [4 pt] Controleer met behulp van een (complete) waarheidstabel, met ook alle relevante subformules, of de volgende *semantic entailment* geldig is of niet:

$$p \to q,\ \neg q \to p \ \models\ q$$

---

2. [18 pt]

   (a) Bij een eerder tentamen werd gevraagd om een bewijs van de volgende *sequent*

$$p \to q,\ p \vee \neg p \ \vdash\ \neg p \vee q$$

   Een willekeurige student gaf het volgende antwoord:

1	$p \to q$	premise
2	$p \vee \neg p$	premise
3	$\neg(\neg p \vee q)$	assumption
4	$\neg p$	assumption
5	$\neg p \vee q$	$\vee$i 4
6	$\bot$	$\neg$e 3,5
7	$\bot$	$\neg$e 6
8	$\neg\neg(\neg p \vee q)$	$\bot$ 3–7
9	$\neg p \vee q$	$\neg\neg$e 8

   Wat is er mis met dit antwoord, zowel qua bewijslogica als qua notatie. Noem alle fouten/foutjes. Je hoeft niet zelf een correct bewijs te geven.

   (b) Bewijs de volgende *sequents* met behulp van de bewijsregels voor natuurlijke deductie. Je mag alleen de standaard (*basic* en *derived*) regels gebruiken.

   i.

$$r \wedge p,\ r \to \neg q \ \vdash\ (p \wedge q) \to (r \to \neg p)$$

   ii.

$$\neg(p \wedge q) \ \vdash\ \neg p \vee \neg q$$

---

3. [10 pt] Controleer voor elk van de volgende twee *gevolgtrekkingen* met behulp van een compleet semantisch tableau of de gevolgtrekking geldig is of niet. Zo niet, geef dan een waardering van de atomen die als tegenvoorbeeld dient.

   Je mag de vereenvoudigde notatie gebruiken; je hoeft dus niet bij iedere operatie alle andere formules te herhalen. Pas wel maar één reductieregel tegelijk toe, en vermeld ook steeds expliciet welke reductieregel je gebruikt.

   (a)

   $$q \vee \neg p \;/\; p \to q$$

   (b)

   $$p \to q \;/\; (q \wedge \neg p) \vee p$$

---

4. [12 pt] Een Horn formule is een conjunctie ('met $\wedge$') van zgn. Horn clauses, waarbij iedere Horn clause een implicatie is van de vorm $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots P_{k_i} \to P'$. Hierin is P' en elke P_j een atoom, of een symbool $\top$ of $\bot$. Om te beslissen of een Horn formule ϕ *satisfiable* is, kunnen we het volgende algoritme gebruiken.

   function HORN(ϕ)
   /* precondition: ϕ is a Horn formula */
   /* postcondition: HORN(ϕ) decides the satisfiability for ϕ */
   begin function
     mark all occurrences of $\top$ in ϕ
     while there is a conjunct $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots P_{k_i} \to P'$ of ϕ
       such that all P_j are marked but P' is not **do**
         mark P'
     end while

     if $\bot$ is marked
     then return 'unsatisfiable'
     else return 'satisfiable'
   end function

   In het correctheidsbewijs van dit algoritme wordt onder andere, met natuurlijke inductie (*mathematical induction*), bewezen dat de volgende bewering:

   > Alle gemarkeerde symbolen P zijn true in alle waarderingen waarin ϕ naar true evalueert.

   geldig is na elk aantal iteraties van de while-lus in dit algoritme.

   (a) Toon aan dat de genoemde bewering waar is na 0 (nul) iteraties van de while-lus.

   (b) Veronderstel dat de genoemde bewering waar is na k iteraties van de while-lus, voor zekere $k \geq 0$. Toon aan dat de bewering dan ook waar is na $k+1$ iteraties.

---

5. [18 pt]

   (a) Wanneer noemen we (volgens de definitie) een formule ϕ in conjunctieve normaalvorm?

   (b) Bepaal voor de volgende twee formules ϕ achtereeenvolgens:

   - `IMPL_FREE`(ϕ),
   - `NNF(IMPL_FREE`(ϕ`))`
   - en `CNF(NNF(IMPL_FREE`(ϕ`)))`

   Geef ook bij de drie stappen afzonderlijk, indien van toepassing, tussenresultaten.

   i. $p \to (q \land (p \lor r))$

   ii. $((p \land q) \to (\neg r \to \neg p)) \lor (\neg r \land q)$
   Is deze tweede formule ϕ *valid*? Motiveer je antwoord.

---

6. [14 pt]

   (a) Druk de volgende uitspraak uit in predikatenlogica:

   > De verdachten zijn mannen uit dezelfde stad als de professor, waarvan minstens één de professor kent.

   Probeer met je formule dicht bij de gegeven uitspraak te blijven. Leg uit waar de gebruikte functie- en/of predikaatsymbolen voor staan.

   (b) Teken de *parse tree* bij je formule uit onderdeel (a).

   (c) Geef een model (dus een concrete verzameling A en concrete functies en/of predikaten) dat je formule uit onderdeel (a) waarmaakt.

---

7. [16 pt] Laat P een unair predikaatsymbool zijn en Q een binair predikaatsymbool, laten a en b twee *nullary* functiesymbolen (constantes) zijn, en laten x en y variabelen zijn. Bewijs de volgende twee *sequents* met behulp van de bewijsregels voor natuurlijke deductie (zonder hulpresultaten over equivalente formules te gebruiken):

   (a)

   $$a = b,\ \forall x(P(b) \to Q(a, x)) \ \vdash \ P(b) \to \forall x Q(b, x)$$

   (b)

   $$\exists y \forall x(P(x) \to Q(x, y)) \ \vdash \ \forall x(P(x) \to \exists y Q(x, y))$$

Z.O.Z.

8. [8 pt] Laat opnieuw P een unair predikaatsymbool zijn en Q een binair predikaatsymbool. Beschouw de volgende formule ϕ:

$$\exists y \forall x (P(x) \to Q(x, y))$$

In deze opgave gaan we *formeel* controleren of het model $\mathcal{M}$ met
$A \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$, $P^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{b\}$, $Q^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, a), (a, b)\}$
formule ϕ waarmaakt, onder de volgende look-up table l:

look-up table l	
x	a
y	b

Ofwel, we gaan controleren of $\mathcal{M} \vDash_l \phi$. Voor deze formele controle kunnen we gebruik maken van een soort 'parse tree'. Geef deze 'parse tree' voor de formule ϕ. Je mag stoppen met opbouwen van de boom als je, met behulp van het reeds opgebouwde deel, met zekerheid de waarheidswaarde van de wortel van de boom kunt bepalen.

Als je niet weet hoe dit met een soort 'parse tree' moet, mag je (voor het grootste deel van de punten) ook de formele inductieve definitie van $\mathcal{M} \vDash_l \phi$ uitwerken.

Wat is dus de conlusie: geldt $\mathcal{M} \vDash_l \phi$, of niet?