TENTAMEN LOGICA (I&E)
Vrijdag 5 januari 2018, 10.00 – 13.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 8 opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Als je het antwoord op een onderdeel niet weet, en je hebt dat antwoord nodig bij een later onderdeel, dan kun je het antwoord 'kopen' bij de docent.

Als er bij een opgave gevraagd wordt om iets te controleren, is het van belang dat je ook toelicht waarom je tot een bepaalde conclusie komt.

---

1. [10 pt]

   (a) Laat $n \geq 1$ en laat $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ en ψ formules in de propositielogica zijn. Wat betekent het (volgens de definitie) als we schrijven

   $$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \ \vDash \ \psi$$

   (b) Controleer met behulp van een (complete) waarheidstabel, met ook alle relevante subformules, of de volgende *semantic entailment* geldig is of niet:

   $$p \to (q \to r), \ r \to p \ \vDash \ r \vee p$$

---

2. [18 pt] Bewijs de volgende *sequents* met behulp van de bewijsregels voor natuurlijke deductie. Je mag alleen de standaard (*basic* en *derived*) regels gebruiken.

   (a)

   $$p \to q, \ p \vee \neg p \ \vdash \ \neg p \vee q$$

   (b)

   $$p \to q, \ \neg p \vee \neg q \ \vdash \neg p$$

   (c)

   $$\neg p \to p, \ p \to (q \vee \neg r) \ \vdash \ r \to (q \wedge p)$$

---

3. [13 pt] Controleer voor elk van de volgende twee *gevolgtrekkingen* met behulp van een compleet semantisch tableau of de gevolgtrekking geldig is of niet. Zo niet, geef dan een waardering van de atomen die als tegenvoorbeeld dient.

   Je mag de vereenvoudigde notatie gebruiken; je hoeft dus niet bij iedere operatie alle andere formules te herhalen. Pas wel maar één reductieregel tegelijk toe.

   (a)

   $$p \vee \neg q \ / \ (p \to q) \vee (p \wedge q)$$

   (b)

   $$p \wedge \neg q, \ p \to r, \ s \to q \ / \ r \wedge \neg s$$

---

4. [8 pt] Laat $n \geq 1$ en laat $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ en ψ formules in de propositielogica zijn.

   Het bewijs van de *completeness* van de propositielogica bestaat uit drie stappen. Beredeneer, als eerste stap, dat als

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$$

   geldt, dat dan ook geldt

$$\vDash \phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to (\ldots (\phi_n \to \psi) \ldots)))$$

   Hint: vraag je af wanneer de formule

$$\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to (\ldots (\phi_n \to \psi) \ldots)))$$

   false zou zijn.

---

5. [16 pt] Bepaal voor de volgende twee formules ϕ achtereeenvolgens:

   - `IMPL_FREE`(ϕ),
   - `NNF(IMPL_FREE`(ϕ))
   - en `CNF(NNF(IMPL_FREE`(ϕ)))

   Geef ook bij de drie stappen afzonderlijk, indien van toepassing, tussenresultaten.

   (a) $(p \land q) \lor \neg(q \land r)$

   (b) $\neg p \to \neg(r \to p)$
   Is deze tweede formule ϕ *valid*? Motiveer je antwoord.

---

6. [16 pt] Laat P een unair predikaatsymbool zijn en Q een binair predikaatsymbool, en laten x en y variabelen zijn. Bewijs de volgende twee *sequents* met behulp van de bewijsregels voor natuurlijke deductie (zonder hulpresultaten over equivalente formules te gebruiken):

   (a)
   $$\forall x(P(y) \to Q(x,y)) \ \vdash P(y) \to (\forall x Q(x,y))$$

   (b)
   $$\exists x P(x),\ \exists y \forall x(P(x) \to Q(x,y)) \ \vdash \exists x \exists y Q(x,y)$$

---

7. [10 pt] Laat opnieuw P een unair predikaatsymbool zijn en Q een binair predikaatsymbool, en laten x en y variabelen zijn. Beschouw de volgende formule ϕ:
   $$\forall x \exists y(P(x) \vee \neg Q(x,y))$$
   Controleer voor elk van de volgende twee modellen $\mathcal{M}$, *informeel* of $\mathcal{M}$ de formule ϕ waarmaakt.

   (a) $A \stackrel{\text{def}}{=} \{a,b\}$, $\quad P^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{b\}$, $\quad Q^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,a),(a,b),(b,a)\}$

   (b) $A \stackrel{\text{def}}{=} \{a,b,c\}$, $\quad P^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{b\}$, $\quad Q^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c),(c,c)\}$

---

8. [9 pt] Bij opgave 7 moest je *informeel* controleren of de formule ϕ
   $$\forall x \exists y(P(x) \vee \neg Q(x,y))$$
   waargemaakt wordt door twee modellen.

   We willen dit nu *formeel* controleren voor het model $\mathcal{M}$ met
   $A \stackrel{\text{def}}{=} \{a,b\}$, $\quad P^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{b\}$, $\quad Q^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,b),(b,a),(b,b)\}$
   (net iets anders dan de vorige twee modellen). Dat wil zeggen: we willen met behulp van de definitie uit [Huth & Ryan, 2004] stap voor stap nagaan of $\mathcal{M} \vDash_l \phi$. Daarbij nemen we willekeurig de volgende look-up table l

look-up table l	
x	a
y	b

   De eerste stap is:
   $$\begin{array}{lll} \mathcal{M} & \vDash_l & \forall x \exists y(P(x) \vee \neg Q(x,y)) \\ & & \text{dan en slechts dan als} \\ & & \mathcal{M} \vDash_{l[x \mapsto a]} \exists y(P(x) \vee \neg Q(x,y)) \quad \text{en} \quad \mathcal{M} \vDash_{l[x \mapsto b]} \exists y(P(x) \vee \neg Q(x,y)) \end{array}$$
   Voer de rest van de stappen uit voor het linker deel hiervan, dat wil zeggen, voor
   $$\mathcal{M} \vDash_{l[x \mapsto a]} \exists y(P(x) \vee \neg Q(x,y))$$
