Hoofdstuk 9

Predikaatlogica: semantische tableaus

9.1 INLEIDING

Evenals in de propositielogica kunnen we ook in de predikaatlogica semantische tableaus gebruiken om de geldigheid van een gevolgtrekking te testen. Het hoofdidee van tableaus was het systematisch zoeken naar een tegenvoorbeeld voor $\varphi_1, ..., \varphi_n / \psi$.
Als na een eindig aantal reductiestappen blijkt dat zo'n tegenvoorbeeld niet bestaat, dan geldt:

$$\varphi_1, ..., \varphi_n \models \psi$$

In de propositielogica bestaat een tegenvoorbeeld voor een gevolgtrekking uit een waardering die $\varphi_1, ..., \varphi_n$ waar maakt en ψ onwaar. Als de gevolgtrekking echter in de predikaatlogica is geformuleerd, dan bestaat een tegenvoorbeeld uit een predikaatlogisch model plus een bedeling die $\varphi_1, ..., \varphi_n$ waar maakt en ψ onwaar. Om zo'n model te vinden, moeten de mogelijkheden om een tableau te maken uitgebreid worden. In vergelijking met de propositielogica zijn nu extra nodig:

- geschikte reductieregels voor de kwantoren $\forall$ en $\exists$
- het gaandeweg construeren van een domein D
- het bijhouden van de interpretatiefunctie I en de bedeling b.

We zullen de methode aldus uitbreiden. Hierbij beperken we ons tot een taal zonder functieletters en tot gevolgtrekkingen zonder individuele constanten en zonder vrije variabelen. Voor een taal met functies en constanten is de methode veel ingewikkelder.
De eerdere regels voor connectieven blijven in deze nieuwe situatie natuurlijk onverkort van kracht. Verder hanteren we de verkorte schrijfwijze van hoofdstuk 3 waarin slechts wordt aangegeven wat er *verandert* in een sequent als deze gereduceerd wordt.

9.2 SEMANTISCHE TABLEAUS

Voorbeeld 9.1

We beginnen met een simpel voorbeeld van een geldige gevolgtrekking:

$\forall x\,(Ax \to Bx),\ \forall x\,(Bx \to Cx)\ /\ \forall x\,(Ax \to Cx)$

Hoe zouden we mogelijke tegenvoorbeelden hiervan systematisch kunnen onderzoeken? Om te beginnen plaatsen we een top–sequent als in het propositielogische geval:

$\forall x\,(Ax \to Bx),\ \forall x\,(Bx \to Cx) \circ \forall x\,(Ax \to Cx)$

De formules links moeten waar worden, die rechts onwaar. Nu levert de linker eis niet direct informatie over wat in het domein moet zitten. Voor de waarheid van universele condities geldt immers 'hoe minder objecten, hoe minder kans dat de regel faalt'. Maar aan de rechterkant liggen de zaken anders, om een universele bewering onwaar te maken, zal het domein minstens één object moeten bevatten dat tegen die bewering zondigt. Laten we zo'n object dus invoeren, zeg d_1, met de passende eis

$\circ\ Ad_1 \to Cd_1 \qquad\qquad D = \{d_1\}$

Notatie

Merk op dat we hier voor het gemak de individuele constante d_1 uit de predikaatlogische taal identificeren met het object d_1 uit het domein D. Ook hierna zullen we dit vaak blijven doen.

Het domein van het te construeren tegenvoorbeeld bevat dus in ieder geval al een object. De gestelde eis aan dat object kunnen we nog nader analyseren met een propositionele reductie op het implicatie–connectief:

$Ad_1 \circ Cd_1 \qquad\qquad D = \{d_1\}$

Hiermee is de universele bewering aan de rechterkant geheel afgehandeld. Maar, nu er eenmaal een object in het domein is verschenen, ontwaken de universele formules aan de linker kant. Zij zeggen immers dat in ieder geval dit object aan hun beweringen moet voldoen

$Ad_1 \to Bd_1,\ Bd_1 \to Cd_1 \circ \qquad D = \{d_1\}$

Deze eisen zijn nu verder weer zuiver propositioneel te onderzoeken, hetgeen leidt tot de volgende splitsingen voor implicaties (waar we eigenlijk langs elke tak het domein zouden moeten bijhouden):

$Bd_1 \circ$ $\qquad\qquad \circ\ Ad_1 \qquad D = \{d_1\}$

$\qquad\qquad\qquad =$

$Cd_1 \circ \qquad \circ\ Bd_1$

$\quad = \qquad\qquad =$

Alle drie de resulterende mogelijkheden blijken te sluiten. Er is dus geen tegenvoorbeeld en de gevolgtrekking is geldig, zoals verwacht.

Invoering van reductieregels

Na deze informele uitleg gaan we nu over tot de officiële formulering van de reductieregels in predikaatlogische tableaus. Zoals reeds opgemerkt, zijn om te beginnen alle eerdere regels voor propositionele connectieven toegestaan. Die voor de kwantoren zijn als volgt:

Reductieregels voor $\forall$

Stel dat een sequent de volgende vorm heeft:

$\Phi \circ \forall x\,\varphi,\ \Psi$

waarbij we voor een tegenvoorbeeld een model $M = (D, I)$ zoeken zodat

$M \models \Phi,\ M \not\models \forall x\,\varphi$ en $M \not\models \psi$ voor alle $\psi \in \Psi$

In het algemeen kunnen we reeds een deel van het domein van M tijdens de tableauconstructie hebben gevonden, zeg tot en met d_k:
$D = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$.
Om $\forall x\,\varphi$ onwaar te maken in M, moet er volgens de waarheidsdefinitie minstens één object $d \in D$ zijn zodat $[d/x]\varphi$ onwaar is.

Reductieregel $\forall_R$

We voeren nu een *nieuw* object d_{k+1} in, breiden D daarmee uit, en eisen dat φ voor dat nieuwe object onwaar wordt. In het speciale geval dat nog niets in D zat, wordt nu een eerste object gekozen:

$\forall_R$: $\quad \Phi \circ \forall x\,\varphi,\ \Psi$

$\qquad\qquad |$

$\qquad\quad \Phi \circ [d_{k+1}/x]\varphi,\ \Psi \qquad$ voor een nieuwe d_{k+1}

We kiezen een nieuw object, omdat er geen reden is om aan te nemen dat voor weerlegging van $\forall x\ \varphi$ een der reeds aanwezige objecten zou moeten dienen.

Achtereenvolgende toepassingen van de reductieregel $\forall_R$ zorgen er voor dat het domein D langzamerhand wordt opgebouwd.

Reductieregel $\forall_L$

De reductieregel voor $\forall_L$ is 'passiever' in dit opzicht. Stel dat de volgende sequent gereduceerd moet worden:

$\Phi, \forall x\ \varphi \circ \Psi$

Om $\forall x\ \varphi$ waar te maken in een model $M = (D, I)$, moet $[d/x]\varphi$ waar worden op D, voor elke $d \in D$. Dit vereist 'invullen' voor alle objecten die tijdens de constructie in het domein terecht komen:

$$\begin{array}{lll} \forall_L: & \Phi, \forall x\ \varphi \circ \Psi & \\ & | & \\ & \Phi, [d/x]\varphi \circ \Psi & \text{voor alle } d \in D \text{ hier aanwezig} \end{array}$$

In een ander opzicht is een ware universele kwantor echter juist 'actiever' dan een onware. Het is namelijk goed mogelijk dat verder in het reductieproces het domein D wordt uitgebreid met een nieuw object d_{k+1}. Dan eisen we dat φ ook voor dit nieuwe object opgaat, enzovoorts. Een universele kwantor links is dus in principe nooit 'uitgewerkt'. Dit is wezenlijk verschillend van de situatie met de propositionele logische operatoren. Het weerspiegelt een van de aspecten van kwantificatie die de notie semantisch geldig voor predikaatlogica wezenlijk complexer maakt dan voor propositielogica.
(Omdat de universele formule actief blijft, zou het correcter zijn deze ook in de gereduceerde sequent links van de sequentstip te noteren. Eigenlijk hebben we in de definitie van de regel $\forall_L$ vereenvoudigde notatie toegepast op de universele formule, zie de opmerking over notatie na voorbeeld 3.5. Iets dergelijks geldt voor de regel $\exists_R$, die hierna nog aan bod komt.)

We geven nog een illustratie van deze twee regels, aan de hand van een van de prenex–equivalenties van hoofdstuk 8.

Voorbeeld 9.2

Een tableau voor $\forall x\ (Ax \to \forall y\ By)\ /\ \forall x\ \forall y\ (Ax \to By)$:

$$\begin{array}{llll} & \forall x\ (Ax \to \forall y\ By) \circ \forall x\ \forall y\ (Ax \to By) & & \\ \forall_R & \circ\ \forall y\ (Ad_1 \to By) & & D = \{d_1\} \\ \forall_L & (Ad_1 \to \forall y\ By) \circ & & \\ \forall_R & \circ\ (Ad_1 \to Bd_2) & & D = \{d_1, d_2\} \\ \forall_L & (Ad_2 \to \forall y\ By) \circ & & \\ & Ad_1 \circ Bd_2 & & \\ & \forall y\ By \circ & \circ\ Ad_1 & \\ & & = & \\ \forall_L & Bd_1, Bd_2 \circ & & \\ & = & & \end{array}$$

Dit tableau sluit, dus de gevolgtrekking is geldig.

Notatie

Voor de overzichtelijkheid geven we toepassingen van reductieregels voor kwantoren wèl, maar van propositionele reductieregels níet aan in tableaus (evenals in hoofdstuk 3).

Reductieregels $\exists_L$ en $\exists_R$

De reductieregels voor $\exists$ vertonen veel overeenkomst met de regels voor $\forall$, met een omkering van rollen links en rechts. Dit valt te begrijpen omdat $\forall$ zich tot $\exists$ verhoudt op een analoge wijze als $\wedge$ zich tot $\vee$ verhoudt, samen met het feit dat in propositielogische tableaus conjunctie en disjunctie reeds een duaal gedrag vertoonden voor wat betreft splitsing.

$$\begin{array}{lll} \exists_L: & \Phi, \exists x\ \varphi \circ \Psi & \\ & | & \\ & \Phi, [d_{k+1}/x]\varphi \circ \Psi & \text{voor een nieuwe } d_{k+1} \text{ in het domein} \\ & & \\ \exists_R: & \Phi \circ \exists x\ \varphi, \Psi & \\ & | & \\ & \Phi \circ [d/x]\varphi, \Psi & \text{voor alle } d \in D \text{ hier aanwezig} \end{array}$$

Voorbeeld 9.3

Het eerdere syllogisme over kaaimannen, reptielen en fluiters uit de hoofdstukken 1 en 8 is als volgt te testen:

$\forall x\,(Kx \to Rx), \neg\exists x\,(Rx \wedge Fx) \circ \neg\exists x\,(Kx \wedge Fx)$

$\exists x\,(Kx \wedge Fx) \circ$

$\circ\ \exists x\,(Rx \wedge Fx)$

$\exists_L$ $\quad Kd_1 \wedge Fd_1 \circ \qquad D = \{d_1\}$

$Kd_1, Fd_1 \circ$

$\exists_R$ $\quad \circ\ Rd_1 \wedge Fd_1$

$\circ\ Rd_1 \qquad\qquad \underset{=}{\circ}\ Fd_1$

$\forall_L$ $\quad Kd_1 \to Rd_1 \circ$

$Rd_1 \underset{=}{\circ} \qquad\qquad \underset{=}{\circ}\ Kd_1$

Ook hier sluit iedere tak en daarmee het gehele tableau. Er zijn dus geen tegenvoorbeelden, zodat van geldigheid sprake is.

Voorbeeld 9.4

Vervolgens beschouwen we nu een geval van ongeldigheid, teneinde de constructie van tegenvoorbeelden uit tableaus te demonstreren. Daartoe kiezen we het syllogisme: 'geen A is B, geen B is C; dus geen A is C'. Het tableau ziet er nu zo uit:

$\neg\exists x\,(Ax \wedge Bx), \neg\exists x\,(Bx \wedge Cx) \circ \neg\exists x\,(Ax \wedge Cx)$

$\exists x\,(Ax \wedge Cx) \circ \exists x\,(Ax \wedge Bx), \exists x\,(Bx \wedge Cx)$

$\exists_L$ $\quad Ad_1 \wedge Cd_1 \circ \qquad D = \{d_1\}$

$Ad_1, Cd_1 \circ \qquad D = \{d_1\}$

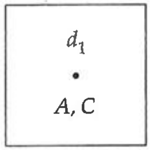
$\exists_R$ $\quad \circ\ Ad_1 \wedge Bd_1, Bd_1 \wedge Cd_1 \qquad D = \{d_1\}$

$\underset{=}{\circ}\ Ad_1 \qquad\qquad \circ\ Bd_1 \qquad D = \{d_1\}$

$\circ\ Bd_1 \qquad\qquad \underset{=}{\circ}\ Cd_1 \qquad D = \{d_1\}$

$\uparrow$

Dit tableau houdt één open tak (aangegeven met de pijl). Deze tak levert een model met één element $d_1 \in D$ waarin Ad_1 en Cd_1 waar zijn en Bd_1 onwaar (onder dezelfde afleesconventie op de tak als vroeger in de propositielogica). In een plaatje:



Preciezer: $D = \{d_1\}$, $I(A) = I(C) = \{d_1\}$, $I(B)$ is leeg.
In dit model zijn inderdaad $\neg\exists x\,(Ax \wedge Bx)$ en $\neg\exists x\,(Bx \wedge Cx)$ waar en $\neg\exists x\,(Ax \wedge Cx)$ onwaar. Door dit tegenvoorbeeld is de gegeven gevolgtrekking niet geldig.

We beschouwen nu gevallen waarin meerplaatsige predikaten optreden.

Voorbeeld 9.5

We testen de volgende wisseling van kwantoren op geldigheid:
$\exists x\, \forall y\, Rxy \;/\; \forall y\, \exists x\, Rxy$.

$\exists x\, \forall y\, Rxy \circ \forall y\, \exists x\, Rxy$

$\exists_L$ $\quad \forall y\, Rd_1y \circ \qquad D = \{d_1\}$

$\forall_L$ $\quad Rd_1d_1 \circ \qquad D = \{d_1\}$

$\forall_R$ $\quad \circ\ \exists x\, Rxd_2 \qquad D = \{d_1, d_2\}$

$\forall_L$ $\quad Rd_1d_2 \circ \qquad D = \{d_1, d_2\}$

$\exists_R$ $\quad \underset{=}{\circ}\ Rd_1d_2, Rd_2d_2 \qquad D = \{d_1, d_2\}$

Het tableau heeft dus maar één tak en die sluit. De gevolgtrekking is dus geldig.

Oneindige tak

Met binaire predikaten kan zich ook voor het eerst een verschijnsel gaan voordoen dat we in de propositielogica nooit ontmoeten, te weten een *oneindig* voortlopende tak in een tableau.

Voorbeeld 9.6

Een andere wisseling van kwantoren wordt gegeven in de sequent:
$\forall y\, \exists x\, Rxy \circ \exists x\, \forall y\, Rxy$.
Hier stuiten we om te beginnen op een klein probleem: noch de linker, noch de rechter formule is te reduceren, omdat er niets in het domein is. Omdat een leeg domein in onze modellen echter niet is toegestaan, geven we een object als 'voorgift'. Uitgaande van $D = \{d_1\}$ kunnen we dan als volgt beginnen:

	$\forall y\, \exists x\, Rxy \circ \exists x\, \forall y\, Rxy$	$D = \{d_1\}$
$\forall_L, \exists_R$		
	$\exists x\, Rxd_1 \circ \forall y\, Rd_1y$	$D = \{d_1\}$
$\exists_L$		
	$Rd_2d_1 \circ \forall y\, Rd_1y$	$D = \{d_1, d_2\}$
$\forall_R$		
	$Rd_2d_1 \circ Rd_1d_3$	$D = \{d_1, d_2, d_3\}$
$\forall_L, \exists_R$		
	$Rd_2d_1, \exists x\, Rxd_2, \exists x\, Rxd_3 \circ Rd_1d_3, \forall y\, Rd_2y, \forall y\, Rd_3y$	$D = \{d_1, d_2, d_3\}$

Het zal duidelijk zijn wat hier gebeurt. Na het creëren van nieuwe objecten moeten we nieuwe formules toevoegen op grond van de zich herhalende regels $\forall_L$ en $\exists_R$. Dat leidt daarop weer tot creëren van nieuwe objecten, enzovoorts. Aldus ontstaat een oneindig tableau met een oneindige tak. In hoofdstuk 11 zullen we bewijzen dat zo'n oneindige tak een tegenvoorbeeld oplevert. Zo'n tegenvoorbeeld is een model met een oneindig domein. Bijvoorbeeld, in het voorgaande wordt een structuur van kopieën van de natuurlijke getallen gecreëerd met een interpretatie die onze kwantorwissel weerlegt. Een mogelijk tegenvoorbeeld zou zijn $I(R)$ = '>' op $\mathbb{N}$.

Naast eindig sluiten en eindig open blijven, hebben we nu dus een derde mogelijkheid gevonden waarin semantische tableaus voor de predikaatlogica kunnen terecht komen: non–terminatie in minstens één tak.

9.3 EEN VERFIJNING VAN DE METHODE

Voorbeeld 9.6 is nog niet helemaal doorslaggevend, omdat er ook een *eindig* tegenvoorbeeld bestaat voor zijn kwantorwissel. Om dat te vinden, dienen de regels $\exists_L$ en $\forall_R$ echter enigszins te worden aangepast.

Stel dat er, bij het maken van een tableau, op een bepaald moment in een sequent rechts van $\circ$ een formule van de vorm $\forall x\, \varphi$ staat. Om een tegenvoorbeeld voor deze sequent te vinden, voeren we niet meteen een nieuw object in, zoals we tot nu toe deden. We kijken nu eerst of er al een d_i in het domein aanwezig is waarvoor $[d_i/x]\varphi$ onwaar gemaakt zou kunnen worden. Dit kunnen we in de volgorde van eerdere invoering van de objecten doen, we proberen eerst of $[d_1/x]\varphi$ een tegenvoorbeeld levert en stoppen als dit inderdaad zo is. Zo niet, dan verlaten we deze poging en beproeven $[d_2/x]\varphi$. Zo gaan we door tot het reeds aanwezige domein is uitgeput. Alleen als al deze pogingen gefaald hebben, springen we terug naar de oude regel, en voeren een nieuw object in D in.
Voor de existentiële kwantor kunnen we evenzo te werk gaan.
De nieuwe 'probeerregels' noemen we $\exists_L{}^*$ en $\forall_R{}^*$.

Voorbeeld 9.7

We maken nu nog eens opnieuw een semantisch tableau voor de sequent uit voorbeeld 9.6, maar nu met gebruikmaking van $\exists_L{}^*$ en $\forall_R{}^*$:

	$\forall y\, \exists x\, Rxy \circ \exists x\, \forall y\, Rxy$	$D = \{d_1\}$
$\forall_L, \exists_R$		
	$\exists x\, Rxd_1 \circ \forall y\, Rd_1y$	$D = \{d_1\}$
$\exists_L{}^*$		
	$Rd_1d_1 \circ$	$D = \{d_1\}$
$\forall_R{}^*$		
	$\circ\, Rd_1d_1$	$D = \{d_1\}$
	=	

Deze laatste sequent sluit en heeft dus geen tegenvoorbeeld. Maar hier hebben we nog slechts geprobeerd of d_1 al een tegenvoorbeeld levert. Dit lukt niet, dus *herzien* we de laatste stap ($\forall_R{}^*$) en voeren daar alsnog een nieuw object d_2 in. Dit geeft:

$\forall_R$		
	$\circ\, Rd_1d_2$	$D = \{d_1, d_2\}$
$\forall_L, \exists_R$ (!)		
	$\exists x\, Rxd_2 \circ \forall y\, Rd_2y$	$D = \{d_1, d_2\}$
$\exists_L{}^*$ (!)		
	$Rd_1d_2 \circ$	$D = \{d_1, d_2\}$
	=	

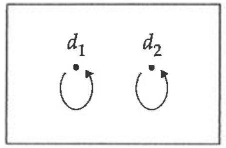
Dit levert evenmin een tegenvoorbeeld, Rd_1d_2 komt immers aan weerskanten van $\circ$ voor. We proberen dan in het laatste geval d_2:

$\exists_L{}^*$ $\quad\quad | \quad Rd_2d_2 \circ \quad\quad D = \{d_1, d_2\}$

Reduceren we nu $\forall y\ Rd_2y$ rechts door voor y d_1 te kiezen, dan krijgen we:

$\forall_R{}^*$ $\quad\quad | \quad \circ\ Rd_2d_1 \quad\quad D = \{d_1, d_2\}$

Nu is geen regel meer toepasbaar en er is geen sluiting opgetreden. Aan de gevonden eindige open tak kunnen we een tegenvoorbeeld voor de topsequent aflezen. Dit is het *eindige* model met domein $D = \{d_1, d_2\}$ en relatie $I(R) = \{\langle d_1, d_1\rangle, \langle d_2, d_2\rangle\}$. In het plaatje van dit model zien we nog eens dat $\forall y\ \exists x\ Rxy$ waar is en $\exists x\ \forall y\ Rxy$ niet:



De probeermethode is nuttig indien er eindige tegenvoorbeelden bestaan. Bestaan die echter niet, dan zal de hele probeerfase verspilde extra moeite blijken, want uit het sluiten van een tableau waarin sterregels zijn toegepast, kan men geen algemene conclusies trekken over de geldigheid van de corresponderende gevolgtrekking. In de praktijk is dus niet zonder meer aan te raden met de stervarianten van de tableauregels te werken.

Belangrijk is bovendien het volgende. Hoewel in het voorgaande geval inderdaad een oneindig tegenvoorbeeld vervangen kon worden door een eindig, zal dit *in het algemeen* zeker niet mogelijk zijn. Zo zagen we in hoofdstuk 7 een voorbeeld van een formule φ die wel modellen had, maar alleen oneindige. Willen we met een tableau testen of zekere conclusie ψ al dan niet uit φ volgt, dan zal deze formule aan de linkerkant geplaatst, onherroepelijk tot een oneindige tak leiden en dan nog wel één die niet door 'proberen' eindig is te omzeilen.

9.4 SAMENVATTING EN OPMERKINGEN

In een predikaatlogisch tableau kunnen zich twee situaties voordoen:
1 Het tableau sluit.
Het tableau is dan eindig en de gevolgtrekking die de sequent boven in het tableau uitdrukt is *geldig*.
2 Er is een niet–sluitende tak. Deze kan:
2.1 eindig afbreken, maar ook
2.2 oneindig doorlopen.
In beide gevallen beschrijft zo'n tak een tegenvoorbeeld en de gevolgtrekking die de sequent boven in het tableau uitdrukt, is *niet geldig*.

Onbeslisbaarheid van de predikaatlogica

Hier weerspiegelt zich een essentieel verschil tussen de predikaatlogica en de eerdere propositielogica. De propositielogica is *beslisbaar*, de predikaatlogica niet. Dit negatieve resultaat staat bekend als de 'Stelling van Church' (1936). Het bewijs van deze stelling is gecompliceerd en valt buiten het bestek van dit boek. Bij semantische tableaus uit zich deze onbeslisbaarheid onder meer in het feit dat niet steeds effectief valt te beslissen of we op een oneindige tak in wording zitten.
Voor sommige *fragmenten* van de predikaatlogica bestaan overigens wel beslissingsmethoden voor geldigheid. Voorbeelden zijn de monadische predikaatlogica en de deeltaal der universele formules zonder functiesymbolen (zie hoofdstuk 8).

Wat de tableaumethode wel gemeen heeft met haar propositielogische verwant, is *adequaatheid*. Mits we nu werken met zogenaamde 'fair scheduling', om ervoor te zorgen dat altijd iedere op een sequent toepasbare reductieregel ooit aan de beurt komt (in elke nog niet gesloten tak), hebben we:

Adequaatheid

Een sequent heeft een gesloten tableau dan en slechts dan als de corresponderende gevolgtrekking geldig is.

Dit resultaat zal in hoofdstuk 11 bewezen worden. Anders gezegd, de onbeslisbaarheid die we hier hebben ontmoet, is niet een toevallig effect van de tableaumethode, maar weerspiegelt een essentiële eigenaardigheid van geldigheid in de predikaatlogica.

9.5 OPGAVEN

9.1 Bewijs met semantische tableaus:

i $\neg\exists x\,(Ax \wedge Bx), \exists x\,(Bx \wedge Cx) \models \neg\forall x\,(Cx \rightarrow Ax)$

ii $\forall x\,(Ax \rightarrow Bx) \vee \forall y\,(By \rightarrow Ay) \models \forall x\,\forall y\,((Ax \wedge By) \rightarrow (Bx \vee Ay))$

iii $\forall x\,\forall y\,((Ax \wedge By) \rightarrow (Bx \vee Ay)) \models \forall x\,(Ax \rightarrow Bx) \vee \forall y\,(By \rightarrow Ay)$

iv $\models \neg\exists x\,\forall y\,(Rxy \leftrightarrow \neg Ryy)$

v $\models \neg\exists x\,\forall y\,(Rxy \leftrightarrow \neg\exists z\,(Ryz \wedge Rzy))$

* vi $\forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow \neg Ryx), \forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow \forall z\,(Rxz \vee Rzy)) \models \forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow \forall z\,(Ryz \rightarrow Rxz))$.

9.2 Geef met behulp van een semantisch tableau een tegenvoorbeeld voor de volgende gevolgtrekking:

$\forall x\,\forall y\,((Ax \wedge By) \rightarrow Rxy), \forall x\,\neg Rxx, \forall x\,(Ax \vee Bx)\ /\ \forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow Ax)$

9.3 Test de volgende syllogismen op geldigheid en geef in geval van niet-geldigheid een tegenvoorbeeld:

i $\forall x\,(Ax \rightarrow Bx), \exists x\,(Ax \wedge Cx)\ /\ \exists x\,(Cx \wedge Bx)$

ii $\forall x\,(Ax \rightarrow Bx), \exists x\,(Ax \wedge \neg Cx)\ /\ \exists x\,(Cx \wedge \neg Bx)$

iii $\neg\exists x\,(Ax \wedge Bx), \forall x\,(Bx \rightarrow Cx)\ /\ \neg\exists x\,(Cx \wedge Ax)$

* 9.4 Hoe moet de tableaumethode worden aangepast om formules met vrije variabelen toe te staan in de topsequent?

* 9.5 Vindt met een semantisch tableau een kleinste tegenvoorbeeld voor:
$\exists! x\,\exists! y\,Rxy\ /\ \exists! y\,\exists! x\,Rxy$

($\exists!$ betekent 'precies één'. Zie ook opgave 6.8.)
Welke reductieregels gebruikt u voor de benodigde identiteit ' = '?