Uitwerkingen Tentamen Capita Fundamentele Informatica
Vrijdag 8 juni 2001, 10:00-13:00

De puntenverdeling is als volgt:

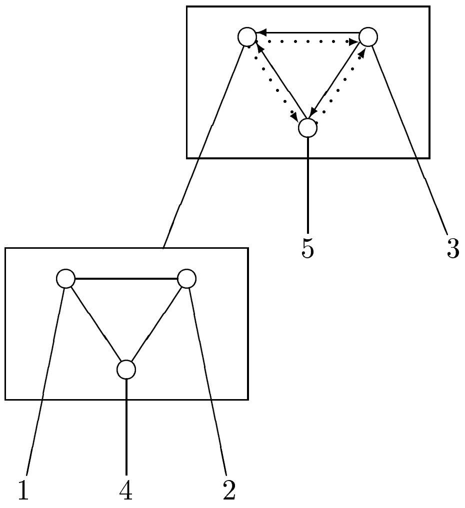
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	totaal
opgave 1:	7	2	4			13
opgave 2:	4	6	6			16
opgave 3:	6	7	10			23
opgave 4:	5	3	2	13	3	26
opgave 5:	7	7	8			22
totaal:						100

---

1. (a) Kijk eerst naar verzamelingen van 2 elementen:
   $\{1,2\}$ OK;
   $\{1,3\} \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 : \underline{\mathrm{dom}}(g)$;
   $\{1,4\}$ OK;
   $\{1,5\} \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 : \{1,2,4,5\}$ OK;
   $\{2,3\} \longrightarrow 1 \longrightarrow \underline{\mathrm{dom}}(g)$ hadden we al;
   $\{2,4\}$ OK;
   $\{2,5\} \longrightarrow 1 \longrightarrow 4 : \{1,2,4,5\}$ hadden we al;
   $\{3,4\} \longrightarrow 1 \longrightarrow \underline{\mathrm{dom}}(g)$ hadden we al;
   $\{3,5\}$ OK;
   $\{4,5\} \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 : \{1,2,4,5\}$ hadden we al.
   Nu grotere clans zoeken door uitbreiding van kleinere clans. Dit geeft alleen nog:
   $\{1,2,4\}$ OK.
   Derhalve is $\mathcal{C}(g) = \mathcal{TC}(g) \cup \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,4\}, \{1,2,4,5\}\}$.

   (b) $\mathcal{PC}(g) = \mathcal{TC}(g) \cup \{\{1,2,4\}\}$. Voor iedere andere clan kun je een clan vinden waarmee hij overlapt.

(c) De shape van g is:



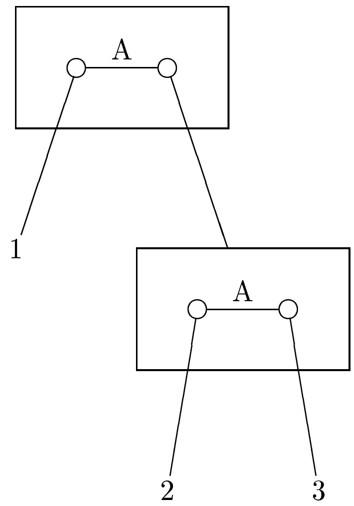
2. (a) Nee, want β bevat een knoop met een niet-speciaal label. In het label van de wortel hebben we namelijk de niet-triviale priemclan $\{\{2\},\ \{4,5\}\}$.

   (b) Nee, want de stelling op blz. 116 van het transparantendictaat zegt: als β een speciale 2s-gelabelde boomfamilie is (op een niet-leeg domein D), dan is $\beta = \underline{\text{shape}}(\underline{\text{sub}}(\beta))$.

   Er is derhalve altijd een 2-structuur g met $\beta = \underline{\text{shape}}(g)$, namelijk $g = \underline{\text{sub}}(\beta)$.

   (c) Ja, beschouw bijvoorbeeld de volgende l2s-gelabelde boomfamilie β:

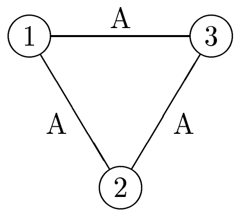
β:



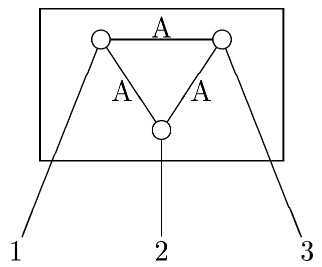
We laten nu op twee manieren zien dat er geen l2s g bestaat zó dat $\beta = \underline{\text{shape}}(g)$ (één manier is natuurlijk voldoende):

- Volgens het lemma op blz. 174 is de enige l2s g zó dat $\beta \in \underline{\text{L2STF}}(g)$ gelijk aan $\underline{\text{l2s}}(\beta)$, en dat is de volgende l2s (links afgebeeld):

$g = \underline{\text{l2s}}(\beta)$:



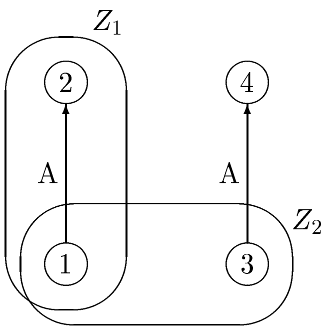
$\underline{\text{shape}}(g)$:



  Echter, de shape van g is niet gelijk aan β, maar aan de hierboven rechts afgebeelde l2s-gelabelde boomfamilie.
- De l2s-gelabelde boomfamilie β is niet disjunct, want de twee interne knopen in β (ouder en kind in de boom) hebben allebei een complete l2s als label, waarbij de kanten in die l2s'en hetzelfde label A dragen. Volgens de stelling op blz. 171a (voorheen blz. 365) van het transparantendictaat is β dan geen shape (van een of andere l2s).

3. (a) Beschouw de volgende gelabelde partiële 2-structuur g (dit is de hele g):

g:



$Z_1 = \{1, 2\}$ is een regio, want beide kanten met label A kruisen Z_1 niet (ze zijn neutraal ten opzichte van Z_1). $Z_2 = \{1, 3\}$ is een regio, want beide kanten met label A verlaten Z_2 (ze zijn uitgaand ten opzichte van Z_2).
Echter, $Z_1 \cup Z_2 = \{1, 2, 3\}$ is geen regio, want de ene kant met label A ($(1, 2)$) kruist $Z_1 \cup Z_2$ niet, terwijl de andere kant met label A ($(3, 4)$) $Z_1 \cup Z_2$ verlaat.

(b) Voor iedere l2s g geldt dat de lege verzameling en het domein van g triviale regio's zijn, ofwel dat $\{\emptyset, \underline{\mathrm{dom}}(g)\} \subseteq R_g$. Dit geldt dus zeker voor een complete l2s g.

Als $|\underline{\mathrm{dom}}(g)| = 1$, dan geldt ook dat $R_g \subseteq \{\emptyset, \underline{\mathrm{dom}}(g)\} = 2^{\underline{\mathrm{dom}}(g)}$, zodat $R_g = \{\emptyset, \underline{\mathrm{dom}}(g)\}$.

Veronderstel nu dat $|\underline{\mathrm{dom}}(g)| \geq 2$ en dat g compleet is. Zij Z een niet-triviale deelverzameling van $\underline{\mathrm{dom}}(g)$ (d.w.z. $Z \neq \emptyset$, $Z \neq \underline{\mathrm{dom}}(g)$). Er is minstens één knoop $x_1 \in \underline{\mathrm{dom}}(g)$ met $x_1 \in Z$, en minstens één knoop $x_2 \in \underline{\mathrm{dom}}(g)$ met $x_2 \notin Z$. Uiteraard is $x_1 \neq x_2$.

Omdat g compleet is, geldt $(x_1, x_2)R(x_2, x_1)$ met $R = \underline{\mathrm{rel}}(g)$. Aangezien (x_1, x_2) de verzameling Z verlaat en (x_2, x_1) Z binnenkomt, is Z geen regio.

Ook voor een complete l2s g met $|\underline{\mathrm{dom}}(g)| \geq 2$ geldt derhalve dat $R_g = \{\emptyset, \underline{\mathrm{dom}}(g)\}$.

(c) Voor dit onderdeel zijn verschillende bewijzen mogelijk. We geven hier een bewijs dat aansluit bij de vorige onderdelen van de som.

Stel dat $|\underline{\mathrm{dom}}(g)| \geq 3$ en dat $R_g = \mathcal{C}(g)$.

Iedere singleton is een (triviale) clan van g: $(\forall x)_{\underline{\mathrm{dom}}(g)}[\{x\} \in \mathcal{C}(g)]$.

Omdat $R_g = \mathcal{C}(g)$, geldt dus ook: $(\forall x)_{\underline{\mathrm{dom}}(g)}[\{x\} \in R_g]$.

De singletons zijn dus allemaal regio's. Omdat ze ook paarsgewijs disjunct zijn, kun je ze naar believen samenvoegen en dan een regio overhouden (zie onderdeel (a)). Derhalve is iedere niet-lege deelverzameling $Z \subseteq \underline{\mathrm{dom}}(g)$ een regio van g. Omdat $\emptyset$ een triviale regio is, is $(\forall Z \subseteq \underline{\mathrm{dom}}(g))[Z \in R_g]$, ofwel $R_g = 2^{\underline{\mathrm{dom}}(g)}$.

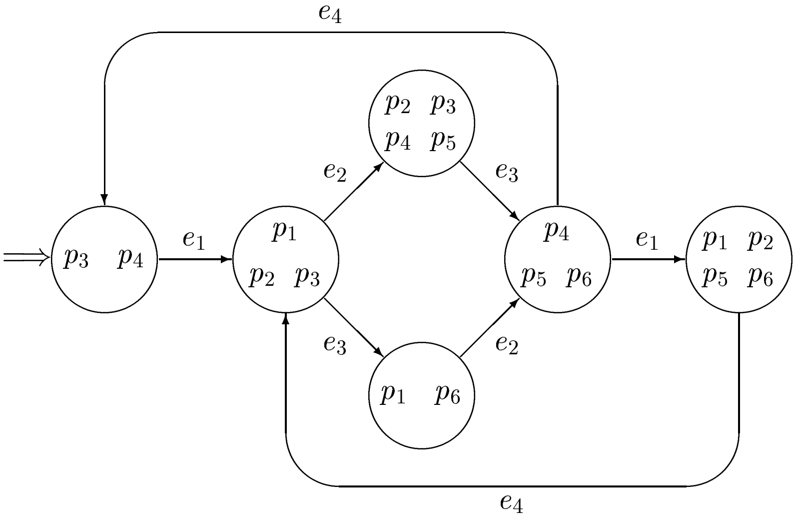
Omdat $R_g = \mathcal{C}(g)$, is ook $\mathcal{C}(g) = 2^{\underline{\mathrm{dom}}(g)}$.

Omdat $|\underline{\mathrm{dom}}(g)| \geq 3$, is de eigenschap "$\mathcal{C}(g) = 2^{\underline{\mathrm{dom}}(g)}$" equivalent met de eigenschap "g is compleet" (zie het lemma op blz. 62 van het transparantendictaat). Dit betekent dat onze g compleet is.

Volgens onderdeel (b) is dan echter $R_g = \{\emptyset, \underline{\mathrm{dom}}(g)\}$, en dat is in tegenspraak met $R_g = 2^{\underline{\mathrm{dom}}(g)}$.

Als $|\underline{\mathrm{dom}}(g)| \geq 3$, kan het daarom niet vóórkomen dat $R_g = \mathcal{C}(g)$.

4. (a) De sequentiële situatiegraaf van $\mathcal{N}$, SCG($\mathcal{N}$) is:



(b) We noemen twee elementen $a, b \in \underline{\text{base}}(g)$ geconjugeerd als geldt:

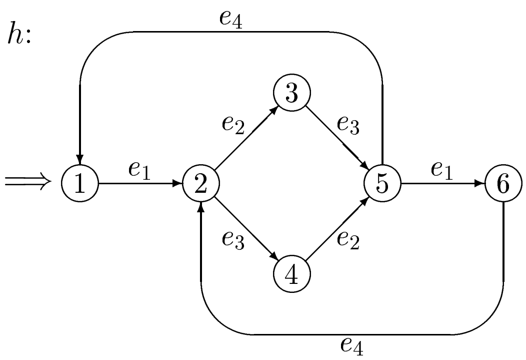
$$(\forall X)_{\underline{\text{dom}}(g)}\ [a \in X \Longleftrightarrow b \notin X],$$

ofwel: de één zit in X als de ander niet in X zit, en omgekeerd.

(c) Ja, SCG($\mathcal{N}$) bevat geconjugeerde *base*-elementen. De paren geconjugeerde *base*-elementen zijn $\{p_1, p_4\}$ en $\{p_3, p_6\}$.

(d)
- Bij onderdeel (a) hebben we SCG($\mathcal{N}$) al geconstrueerd.
- Een abstracte versie $h = (g, 1)$ van SCG($\mathcal{N}$) is:

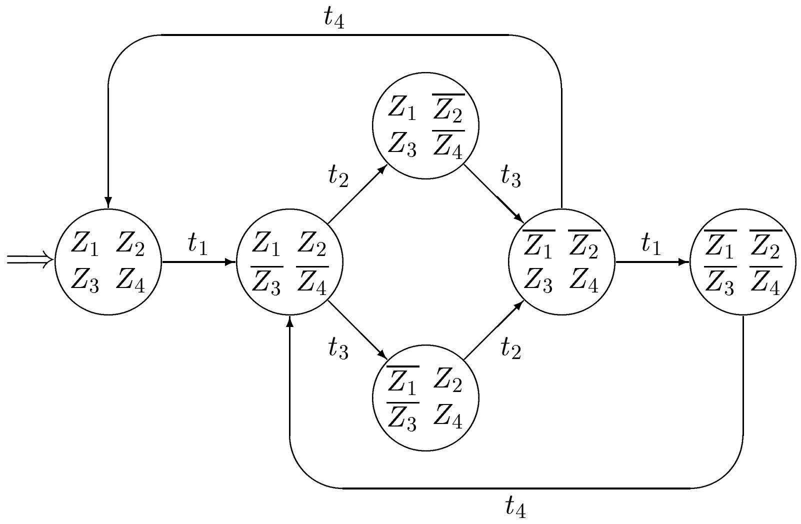
h:



- Om de regionale versie $(\underline{\text{regv}}(g), \underline{\text{reg}}_g(1))$ van h te construeren hebben we alle regio's van g nodig. Die bepalen we systematisch als volgt:

$$\begin{array}{ll}
1,2,3,4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6: & Z_0 = \underline{\text{dom}}(g), \overline{Z_0} = \emptyset; \\
1,2,3,\neg 4 \longrightarrow \neg 5 \longrightarrow \neg 6: & Z_1 = \{1,2,3\}, \overline{Z_1} = \{4,5,6\}; \\
1,2,\neg 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow \neg 5 \longrightarrow \neg 6: & Z_2 = \{1,2,4\}, \overline{Z_2} = \{3,5,6\}; \\
1,\neg 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow \neg 6, 3 \longrightarrow \neg 4: & Z_3 = \{1,3,5\}, \overline{Z_3} = \{2,4,6\}; \\
1,\neg 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow \neg 6, \neg 3 \longrightarrow 4: & Z_4 = \{1,4,5\}, \overline{Z_4} = \{2,3,6\}.
\end{array}$$

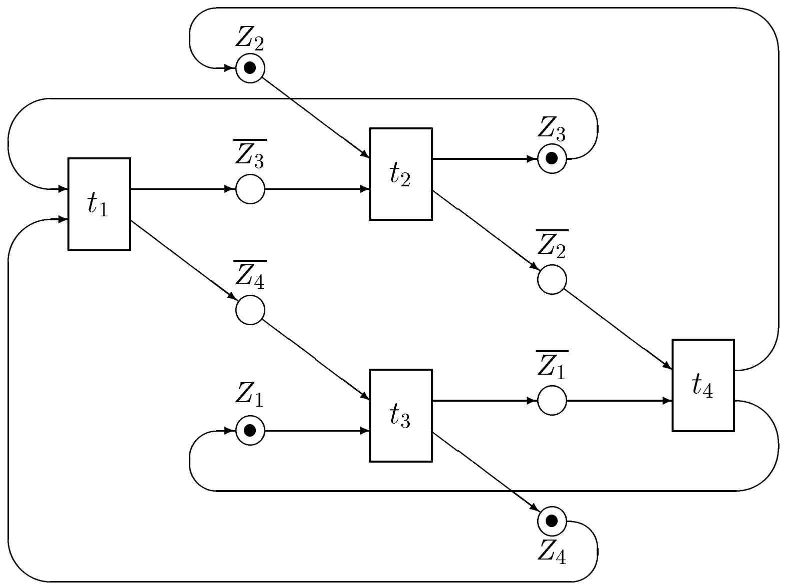
Als we de triviale regio $Z_0 = \underline{\text{dom}}(g)$ negeren, wordt $(\underline{\text{regv}}(g), \underline{\text{reg}}_g(1))$:



met $t_1 = (\{Z_3, Z_4\}, \{\overline{Z_3}, \overline{Z_4}\})$, $t_2 = (\{Z_2, \overline{Z_3}\}, \{\overline{Z_2}, Z_3\})$,
$t_3 = (\{Z_1, \overline{Z_4}\}, \{\overline{Z_1}, Z_4\})$, $t_4 = (\{\overline{Z_1}, \overline{Z_2}\}, \{Z_1, Z_2\})$.

- De verzadigde versie van $\mathcal{N}$ verkrijgen we nu door in de *base graph* van $\underline{\text{regv}}(g)$ de elementen van $\underline{\text{reg}}_g(1)$ te markeren:

$\mathcal{N}$:



(e) Hier zijn verschillende antwoorden mogelijk.

De meest voor de handliggende inbedding ϕ van de plaatsen van $\mathcal{N}$ in de verzadigde versie wordt gegeven door: $\phi(p_1) = \overline{Z_3}$, $\phi(p_2) = \overline{Z_4}$, $\phi(p_3) = Z_1$, $\phi(p_4) = Z_3$, $\phi(p_5) = \overline{Z_2}$, $\phi(p_6) = \overline{Z_1}$. De plaatsen Z_2 en Z_4 zijn dus extra in de verzadigde versie.

De corresponderende bijectie ϕ' van de transities van $\mathcal{N}$ naar die van de verzadigde versie wordt gegeven door: $\phi'(e_1) = t_1$, $\phi'(e_2) = t_2$, $\phi'(e_3) = t_3$, $\phi'(e_4) = t_4$.

5. (a) $\tau = (\lambda, \rho, \mu)$, met
$\rho = (9, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4)$ (de visible order, de lineaire ordening volgens de 'V'-pijlen),
$\mu = (1, 4, 3, 2, 5, 7, 6, 8, 9)$ (de hidden order, de lineaire ordening volgens de 'H'-pijlen) en
$\lambda(1) = \mathrm{b}$, $\lambda(2) = \lambda(6) = \lambda(8) = \mathrm{a}$, $\lambda(3) = \mathrm{n}$, $\lambda(4) = \mathrm{ij}$, $\lambda(5) = \mathrm{k}$, $\lambda(7) = \mathrm{l}$, $\lambda(9) = \mathrm{r}$.

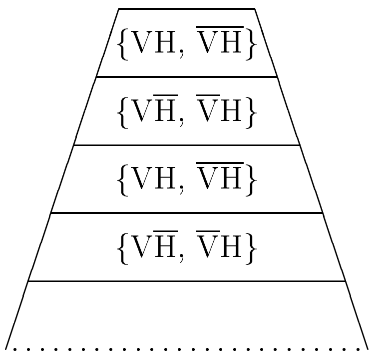
(b) In een tekst τ (met minstens 2 elementen) heb je 1 of 2 *features*. De labelparen die bij een feature kunnen horen zijn $\{\mathrm{VH}, \overline{\mathrm{VH}}\}$ en $\{\mathrm{V}\overline{\mathrm{H}}, \overline{\mathrm{V}}\mathrm{H}\}$. Bij een alternerende tekst heeft iedere interne knoop in de shape volgens de definitie een lineare l2s als label, en in die lineaire l2s worden óf de labels $\{\mathrm{VH}, \overline{\mathrm{VH}}\}$ óf de labels $\{\mathrm{V}\overline{\mathrm{H}}, \overline{\mathrm{V}}\mathrm{H}\}$ gebruikt.

Stel dat in de wortel van de shape de labels $\{\mathrm{VH}, \overline{\mathrm{VH}}\}$ worden gebruikt. Dan moeten in de kinderen van de wortel (voor zover die intern zijn) de labels $\{\mathrm{V}\overline{\mathrm{H}}, \overline{\mathrm{V}}\mathrm{H}\}$ worden gebruikt.

Immers, de stelling op blz. 171a (voorheen blz. 365) van het transparantendictaat zegt dat de shape van een l2s disjunct is, wat o.a. inhoudt dat twee knopen die vader en kind zijn en die allebei een lineair label hebben, zeg g_1 en g_2, geen gemeenschappelijk label in $\underline{\mathrm{ualph}}(g_1)$ en $\underline{\mathrm{ualph}}(g_2)$ kunnen hebben.

Om dezelfde reden worden dan voor alle kinderen van de kinderen van de wortel (voor zover ze intern zijn) de labels $\{\mathrm{VH}, \overline{\mathrm{VH}}\}$ weer gebruikt, een niveau lager weer $\{\mathrm{V}\overline{\mathrm{H}}, \overline{\mathrm{V}}\mathrm{H}\}$, enz.

Kijken we derhalve alleen naar de labels die op een bepaald niveau worden gebruikt, dan ziet de shape er als volgt uit:

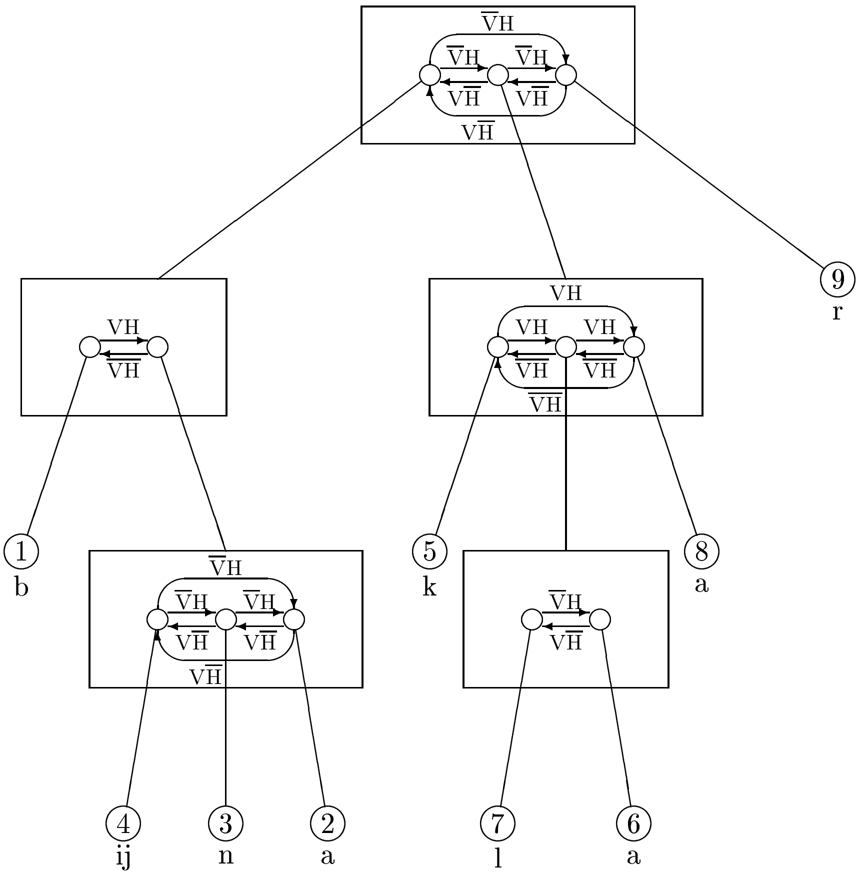


De gebruikte labels alterneren dus.

Als in de wortel de labels $\{\mathrm{V}\overline{\mathrm{H}}, \overline{\mathrm{V}}\mathrm{H}\}$, worden gebruikt, gaat de redenering uiteraard analoog.

(c) De singletonteksten die we gebruiken zijn: voor $i = 1, 2, \ldots, 9$, $\tau_i = (\lambda_i, (i), (i))$ met $\lambda_i(i) = \lambda(i)$.

In de expressie voor τ mag Vrev voorkomen, maar niet Hrev. We bekijken daarom de shape van τ 'in de H-volgorde':



Als $X = \{x_1, \ldots, x_l\}$ voor een bepaalde $l \geq 1$ een knoop uit de shape is, dan noteren we de tekst die bij X hoort als $\tau_{x_1 \ldots x_l}$ (dit sluit ook mooi aan bij de notatie voor de singletonteksten).

We construeren nu bottom up een expressie voor τ over Vrev, $\bigoplus$ en de singletonteksten:

$\tau_{234} = \underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_4 \oplus \tau_3 \oplus \tau_2)$,
$\tau_{1234} = \tau_1 \oplus \tau_{234}$,
$\tau_{67} = \underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_7 \oplus \tau_6)$,
$\tau_{5678} = \tau_5 \oplus \tau_{67} \oplus \tau_8$,
$\tau = \tau_{1 \ldots 9} = \underline{\mathrm{Vrev}}(\underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_{1234}) \oplus \underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_{5678}) \oplus \tau_9) =$
$\underline{\mathrm{Vrev}}(\underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_1 \oplus \underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_4 \oplus \tau_3 \oplus \tau_2)) \oplus \underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_5 \oplus \underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_7 \oplus \tau_6) \oplus \tau_8) \oplus \tau_9)$.

N.B.: wanneer we het op papier uitgedeelde algoritme voor het opbouwen van zulke expressies letterlijk hadden gehanteerd, hadden we in plaats van $\tau_4, \tau_3, \tau_2, \tau_7, \tau_6, \tau_9$ in bovenstaande (deel-)expressies respectievelijk $\underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_4), \underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_3), \underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_2), \underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_7), \underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_6), \underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_9)$ moeten schrijven. Dit had de expressie echter onoverzichtelijker gemaakt en het had voor de betekenis niets uitgemaakt. Voor singleton-teksten τ_i geldt namelijk dat $\underline{\mathrm{Vrev}}(\tau_i) = \tau_i$.