TENTAMEN AUTOMATA THEORY
Maandag 11 januari 2021, 09.00 - 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit negen opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen. Als we het in dit tentamen over een eindige automaat hebben (zonder verdere toevoeging), bedoelen we een deterministische eindige automaat zonder Λ-transities (wat elders *DFA* genoemd wordt).

---

1. [16 pt] Laat L de taal zijn van alle strings over $\{a, b\}$ waarvan de eerste en de laatste letter hetzelfde zijn. Om precies te zijn: alle strings $x_1x_2 \dots x_n$ in $\{a, b\}^*$, waarvoor $n \geq 1$ en $x_1 = x_n$.

   (a) Teken een eindige automaat M, zó dat $L(M) = L$.

   (b) Beschrijf alle equivalentieklassen van de equivalentierelatie $\equiv_L$ *(in het boek I_L genoemd)*, voor de taal L van hierboven. Dat wil zeggen: beschrijf voor elke equivalentieklasse (in woorden en/of formules, maar in ieder geval duidelijk en volledig) wat alle elementen van die klasse zijn.

   (c) Kies twee strings x_1 en x_2 die allebei niet in L zitten, maar in verschillende equivalentieklassen $[x_1]$ en $[x_2]$ zitten. Toon aan, met behulp van de definitie van *distinguishability*, dat x_1 en x_2 distinguishable zijn.

   (d) Pas op je antwoord voor onderdeel (a) de constructie toe om een (al dan niet deterministische) eindige automaat voor een taal L om te bouwen tot een niet-deterministische eindige automaat (eventueel met Λ-transities) voor L^*. Geef als je antwoord de resulterende automaat.

---

2. [6 pt] Laat $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ en $M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$ twee willekeurige eindige automaten met hetzelfde invoeralfabet Σ zijn. Met de productconstructie kun je uit M_1 en M_2 een eindige automaat $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ construeren, zó dat $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

   Beschrijf (in woorden en/of formules, maar in ieder geval duidelijk en volledig) wat bij deze automaat M de onderdelen Q, q_0, A en δ zijn.

---

3. [12 pt] Het pomplemma voor reguliere talen kan gebruikt worden om aan te tonen dat een bepaalde taal niet door een eindige automaat geaccepteerd kan worden. Bijvoorbeeld de taal

   $$L = \{x \in \{a, b\}^* \mid n_a(x) > n_b(x)\} = \{a, aa, aaa, aab, aba, baa, \dots\}$$

   Veronderstel dat er toch een eindige automaat bestaat die L accepteert, en dat deze automaat n toestanden heeft. Welke van de onderstaande vier strings x_1, x_2, x_3, x_4 is/zijn geschikt om een tegenspraak met het pomplemma te vinden? Geef voor elke string x_i die **niet** geschikt is, een opsplitsing uvw van x_i die keurig aan het pomplemma voldoet.

   N.B.: we gaan uit van de oorspronkelijke formulering van het pomplemma, waarbij $|uv| \leq n$.

   $$x_1 = b^{n-1}a^n$$
   $$x_2 = a^{2n}b^n$$
   $$x_3 = b^n a^{2n}$$
   $$x_4 = a(b^n)a^n$$

---

4. [12 pt] Bij huiswerkopgave 2 werd gevraagd om een reguliere expressie voor de volgende taal:

$$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid \forall \text{ prefix } z \text{ van } x \text{ geldt dat } n_a(z) \geq n_b(z) \geq n_a(z) - 2\ \}$$

Ofwel: het aantal b's is, van links naar rechts lezend, nooit groter, maar ook nooit veel kleiner dan het aantal a's. Bijvoorbeeld, aaa en $aaab$ zitten niet in L, want in beide gevallen is het verschil tussen het aantal a's en het aantal b's na drie letters te groot. Omgekeerd zit ook $baaa$ niet in L, want na één letter hebben we meer b's dan a's gehad. De strings $abaa$ en $aaba$ zitten daarentegen allebei wel in L.

Beschouw de volgende drie reguliere expressies r_1, r_2, r_3:

$$\begin{aligned} r_1 &= a(ab)^*(\Lambda + a + b) + (ab + aabb)^*(\Lambda + a + aa) \\ r_2 &= \Lambda + a(ab + ba)^*(\Lambda + a + b) \\ r_3 &= (a + ab(ba + ab)^*)^* \end{aligned}$$

Laat $L(r_i)$ de taal zijn die beschreven wordt door expressie r_i. Geef voor elke expressie r_i aan:

- of $L(r_i) \subseteq L$ of niet; zo nee, geef dan een string die wel in $L(r_i)$ zit, maar niet in L;
- of $L \subseteq L(r_i)$ of niet; zo nee, geef dan een string die wel in L zit, maar niet in $L(r_i)$.

Inderdaad, als het antwoord twee keer 'ja' is, is r_i een correcte reguliere expressie voor taal L.

N.B.: Als het antwoord op een vraag 'ja' is, hoef je dat niet toe te lichten.

---

5. [17 pt] Laat $L = \{a^i b^j \mid i < j < 2i\}$.

   (a) Geef de eerste drie elementen in de canonieke volgorde van L.

   (b) Geef een context-vrije grammatica G, zó dat $L(G) = L$.
   Leg uit wat de functie is van de diverse variabelen en producties in G.
   Als je geen geschikte grammatica G kunt bedenken, kun je een deel van de punten verdienen met een grammatica voor $L' = \{a^i b^j \mid i \leq j \leq 2i\}$ (met uitleg).

   (c) Teken een stapelautomaat M, zodat $L(M) = L$ (de oorspronkelijke taal dus). Deze stapelautomaat moet rechtstreeks gebaseerd zijn op eigenschappen van de taal L. Hij moet dus niet het resultaat zijn van een standaardconstructie om een context-vrije grammatica om te zetten in een stapelautomaat.
   Probeer ervoor te zorgen dat M geen Λ-transities bevat. Als dit niet lukt, kun je nog wel het grootste deel van de punten verdienen.

---

6. [12 pt] Laat G de context-vrije grammatica zijn met de volgende producties:

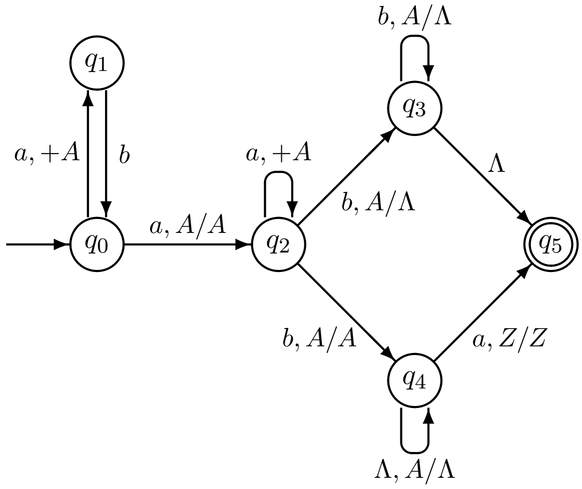
$$S \to SaS \mid b$$

Toon aan, met behulp van inductie naar de lengte (= het aantal stappen) van de afleiding, dat elke string $x \in L(G)$ van de vorm $(ba)^i b$ voor zekere $i \geq 0$ is.

N.B.: Omgekeerd geldt ook dat elke string van die vorm in $L(G)$ zit, maar dat hoef je niet te bewijzen.

---

7. [8 pt] Beschouw onderstaande stapelautomaat M met invoeralfabet $\{a, b\}$ en initieel stapelsymbool Z:



Benoem alle voorkomens van niet-determinisme in M. Vermeld bij elk voorkomen om welke toestand, welke invoer, en welk stapelsymbool het gaat.

---

8. [12 pt] Laat G de context-vrije grammatica zijn met startvariabele S en de volgende producties:

$$S \to aSa \mid aTa \qquad T \to bTb \mid \Lambda$$

(a) Teken de niet-deterministische top-down stapelautomaat $NT(G)$.

(b) Voer een succesvolle berekening in $NT(G)$ uit (een berekening die leidt tot acceptatie van de invoer) voor invoer $x = abba$. Geef deze berekening overzichtelijk weer in een tabel van de volgende vorm:

toestand	resterende invoer	stapel	actie
q_0	$abba$	Z	...

---

9. [5 pt] Geef een voorbeeld van twee context-vrije talen L_1 en L_2 en een niet-context-vrije taal L, zó dat $L = L_1 \cap L_2$.

N.B.: je hoeft niet aan te tonen dat L_1 en L_2 context-vrij zijn en dat L niet context-vrij is.

`einde tentamen`