Knuth, Conway en Surreal numbers

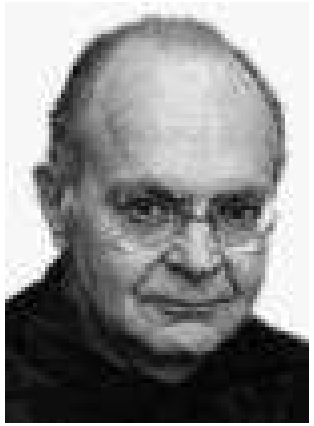
dr. Walter Kosters

Universiteit Leiden, Informatica

woensdag 30 november 2011

http://www.liacs.nl/home/kosters/

Knuth en Conway

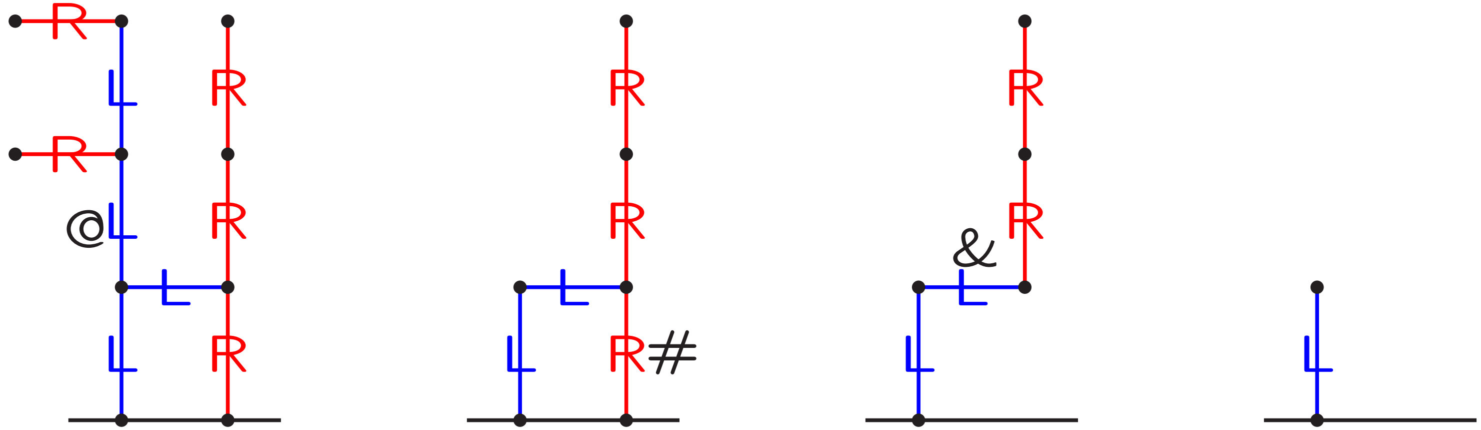


Donald E.(Ervin) Knuth
1938, US
NP; KMP
TEX
change-ringing; 3:16
The Art of Computer
Programming

John H.(Horton) Conway
1937, UK $\longrightarrow$ US
Co_1, Co_2, Co_3
Doomsday algoritme
game of Life; Angel problem
Winning Ways for your
Mathematical Plays

Surreal numbers

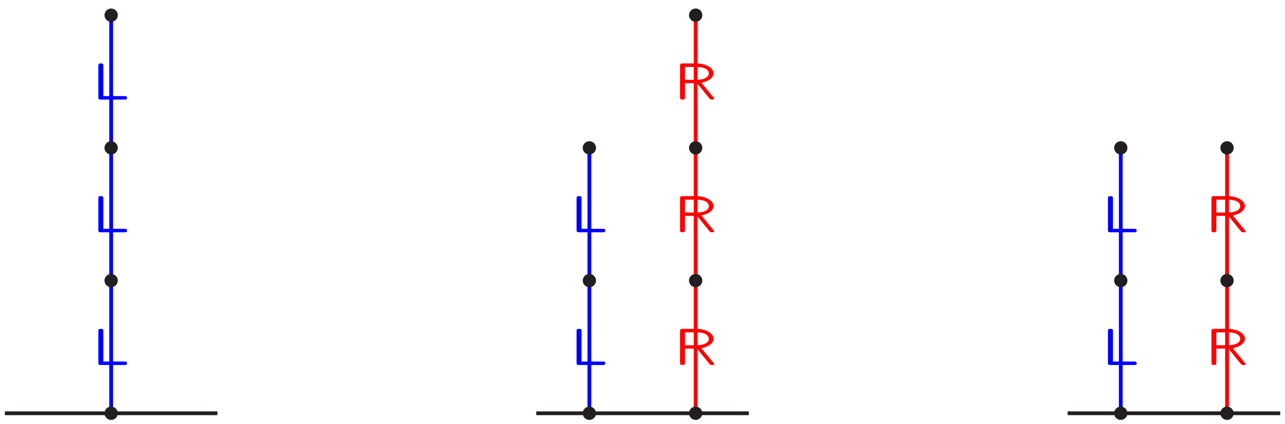
Bij het spel Hackenbush verwijderen Links en Rechts om de beurt respectievelijk een bLauw of een Rood streepje, waarna alle streepjes die niet meer met de grond verbonden zijn ook worden verwijderd. *Wie niet kan, heeft verloren!*



Links kiest @, Rechts kiest # (dom), Links kiest & en wint

Overigens: hier kan Rechts altijd winnen, wie er ook begint!

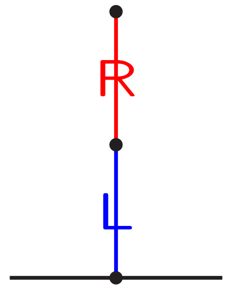
Wat is bij Hackenbush de waarde van een positie?



waarde 3 waarde $2-3=-1$ waarde $2-2=0$

Als de waarde positief (>0) is, *kan* Links altijd winnen (wie er ook begint; in het linker voorbeeld met voorsprong 3), als de waarde negatief (<0) is *kan* Rechts altijd winnen, en als de waarde 0 is verliest de beginspeler.

Maar wat is de waarde van deze positie?



Als Links begint, wint hij meteen; als Rechts begint, kan Links nog een keer, en wint hij ook. Dus Links wint altijd. De waarde is daarom > 0.

Vraag: is de waarde gelijk aan 1?

Als de waarde links 1 zou zijn, zou de waarde van de rechter positie $1 + (-1) = 0$ moeten zijn, en zou de beginspeler hier moeten verliezen. Is dat zo?

Nee: het is zo dat als Links begint, Links verliest, en als Rechts begint Rechts ook kan winnen. Dus Rechts wint altijd (= kan altijd winnen), en daarom is de rechter positie < 0, en de linker tussen 0 en 1.

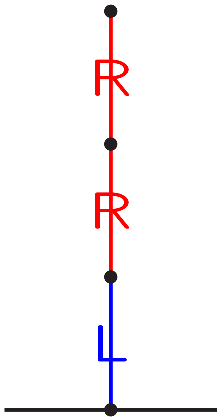
We noteren de waarde van de linker positie met $\{\,0 \mid 1\,\}$.

We merken op dat de rechter positie wél waarde 0 heeft: de beginspeler verliest. En dus geldt:

$$\{\,0 \mid 1\,\} + \{\,0 \mid 1\,\} + (-1) = 0,$$

en blijkbaar $\{\,0 \mid 1\,\} = 1/2$.

We noteren de waarde van een positie waarin Links kan spelen naar (waardes van) posities uit de verzameling L en Rechts kan spelen naar (waardes van) posities uit de verzameling R met $\{ L \mid R \}$. Een voorbeeld:



De waarde is hier $\{ 0 \mid \frac{1}{2}, 1 \} = \frac{1}{4}$.

De waarde blijkt altijd het "eenvoudigste" getal dat tussen linker en rechter verzameling in zit.

Op deze manier definiëren we surreële getallen: het zijn "nette" paren van verzamelingen eerder gedefinieerde surreële getallen.

We beginnen met $0 = \{\,\emptyset \mid \emptyset\,\} = \{\,\text{NIKS} \mid \text{NIKS}\,\} = \{\,\mid\,\}$: het spel waarbij de beginspeler geen enkele mogelijkheid heeft, en dus verliest.

En dan $1 = \{\,0 \mid\,\}$ en $-1 = \{\,\mid 0\,\}$.
En $42 = \{\,41 \mid\,\}$.
En $\frac{3}{8} = \{\,\frac{1}{4} \mid \frac{1}{2}\,\}$.
En $\pi = \{\,3, 3\frac{1}{8}, 3\frac{9}{64}, \ldots \mid 4, 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 3\frac{3}{16}, 3\frac{5}{32}, \ldots\,\}$.

De reeële getallen (de verzameling $\mathbf{R}$) zitten in de surreeële getallen (de verzameling $\mathbf{S}$).

De zogeheten Dali-functie $\delta : \mathbf{R} \to \mathbf{S}$ verzorgt die "inbedding": $\delta(1) = \{\, 0 \mid \,\} = 1$. Maar er is meer . . .

We definieren bijvoorbeeld:

$$\varepsilon = \{\, 0 \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \,\},$$

een "ongelooflijk klein positief getal", en

$$\omega = \{\, 0, 1, 2, 3, \ldots \mid \,\} = \{\, \mathbf{Z} \mid \emptyset \,\},$$

een "verschrikkelijk groot getal, een soort ∞".

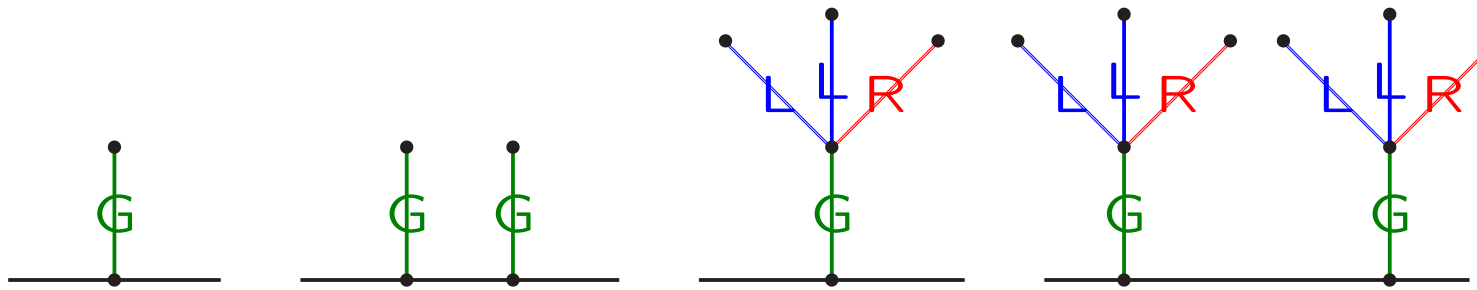
Dan blijkt te gelden:

$$\varepsilon \cdot \omega = 1$$

— mits je vermenigvuldiging goed gedefinieerd is ...

En dan heb je ook $\omega + 1$, $\sqrt{\omega}$, ω^ω, $\varepsilon/2$, enzovoorts!

Bij Hutspot-Hackenbush zijn er ook nog Groene streepjes, die door *beide* spelers mogen worden weggepakt.



De meest linker positie heeft waarde $* = \{ \ 0 \mid 0 \ \}$ (dat blijkt *geen* surreëel getal te zijn), want de beginspeler kan winnen door het Groene streepje te pakken. De tweede van links is $* + * = 0$ (beginner verliest).

De tweede van rechts is weer gewonnen voor de beginspeler. De meest rechter positie is gewonnen voor Links (wie er ook begint), en is dus > 0.

Hoe tel je op? Zo:

$$a + b = \{\, A_L + b, a + B_L \mid A_R + b, a + B_R \,\}$$

als $a = \{\, A_L \mid A_R \,\}$ en $b = \{\, B_L \mid B_R \,\}$.
Hier definiëren we $u + Z = \{\, u + z \mid z \in Z \,\}$; $u + \emptyset = \emptyset$.

Hoe kom je aan die formule? Dat zie je als je met spellen gaat spelen, die je dan optelt = samenvoegt = parallel naast elkaar speelt: op 2 borden dammen, waarbij je iedere keer een zet op één bord (naar keuze) doet.

Ga maar eens na dat

$$1 + \frac{1}{2} = \{\, 1 \mid 2 \,\} = \frac{3}{2}\,.$$

We hebben heel veel details overgeslagen. Waarom is bijvoorbeeld $\{ \ 0 \mid 2 \ \}$ gelijk aan 1? En waarom is $\{ \ 0 \mid 7 \ \}$ ook gelijk aan 1, en niet aan $3\frac{1}{2}$? En wat is gelijkheid? En is de optelling goed gedefinieerd (ja)? En geldt $\delta(x+y) = \delta(x)+\delta(y)$ (ja)?

Voor meer informatie, zie

`http://www.tondering.dk/claus/surreal.html`

J.H. Conway, On Numbers and Games, 2001

E.R. Berlekamp, J.H. Conway and R.K. Guy,
Winning Ways for your Mathematical Plays, 2001