48) Wat berekent de volgende functie (voor $y \geq 0$) ?

```
int func(x, y) ::=
   als y > 0
        return x * func(x, y - 1)
   anders
        return 1
```

49) De taal L over $\{a, b\}$ wordt als volgt inductief gedefinieerd:

(i) $\lambda \in L$

(ii) als $x \in L$ dan $ax \in L$ en $axb \in L$

(iii) L bevat geen andere strings dan die door toepassing van (i) en (ii) kunnen worden verkregen

a. Geef alle woorden uit L met lengte ≤ 5.

b. Geef een algemene beschrijving van de taal L. Hoe zien de woorden uit L eruit?

50) Schrijf als sommatie, en bewijs met inductie naar n:

a. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, $n \geq 1$.

b. $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^n = 3^{n+1} - 1$, $n \geq 0$.

51) Bewijs met inductie naar n:

a. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$.

b. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} k$, $n \geq 1$.

c. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 1$.

Merk op dat de gelijkheden hierboven ook voor $n = 0$ gelden.

52) Toon aan met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $(1 - a)^n \geq 1 - na$ (met $0 < a < 1$).

53) Bewijs: $1 + \Sigma_{i=1}^{n} (i \cdot i!) = (n + 1)!$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$.

54) We definiëren de rij a_n ($n \in \mathbb{N}$) door middel van de recurrentie $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, met beginwaarden $a_0 = 2$ en $a_1 = 1$.
Bewijs met inductie dat $a_n = (-1)^n + 2^n$.

55) De rij van Fibonacci wordt gegeven door $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ($n \geq 1$) met beginwaarden $F_0 = 0$ en $F_1 = 1$.

a. Bereken $\sum_{k=1}^{4} F_{2k}$.

b. Bewijs met inductie dat $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$ voor alle $n \geq 1$.

c. Als we beginnen met de waarden $F_0 = 1$ en $F_1 = 3$, welke formule krijgen we bij **b.** ?

d. Bereken $\sum_{k=1}^{4} F_k^2$.

e. Bewijs met inductie dat $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ voor alle $n \geq 1$.

56) De taal L over $\{a, b\}$ wordt als volgt inductief gedefinieerd:

(i) $a \in L$, $b \in L$,

(ii) als $x \in L$, dan $ax \in L$ en $xbb \in L$,

(iii) L bevat geen andere woorden dan die door toepassing van (i) en (ii) kunnen worden verkregen.

a. Laat zien dat de volgende woorden elementen van L zijn: aa, bbb, $abbb$, $abbbb$.

b. Beargumenteer dat de volgende woorden geen element van L zijn: ba, bb, $bbbb$.

c. Bewijs met inductie dat voor elk woord $z \in L$ geldt dat het ofwel met een a begint ofwel bestaat uit een oneven aantal b's.

57) Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle $n \geq 1$ het aantal lijnen $\ell(n)$ in de complete graaf K_n gelijk is aan $\dfrac{n\,(n-1)}{2}$.
Dus, geef de basisstap, formuleer de inductiehypothese, en bewijs de inductiestap.

58) De verzameling van Blurpsen is de kleinste verzameling zodat:

1. Δ is een Blurps.
2. Als x een Blurps is, dan zijn ook $x\Delta\Delta$ en $\Diamond xx\Diamond$ Blurpsen.
3. Als x en y Blurpsen zijn, dan is ook $x\Delta y$ een Blurps.

Laat zien dat alle Blurpsen een oneven aantal driehoekjes Δ hebben of ten minste één ruit $\Diamond$ bevatten.

Opgave gevonden op internet:
`http://www.phil.uu.nl/~lev/wiskai.html`