73) Op welke dag viel 29 februari 2016? (1 januari 2000 was een zaterdag)

74) Zij $a(m)$ de alternerende som van de cijfers van een getal m in het tientallig stelsel. Bewijs dat $m \equiv a(m) \pmod{11}$.

Uitleg: als $c_k c_{k-1} \cdots c_0$ de representatie van m in het tientallig stelsel is, dan is $a(m) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots + (-1)^k c_k$.

75) Een element (eigenlijk een klasse van elementen) $x \in \mathbb{Z}_m$ heet *inverteerbaar* als er een $y \in \mathbb{Z}_m$ bestaat met $x \cdot y \equiv 1$ modulo m.
Ter herinnering: feitelijk is $\mathbb{Z}_m = \{\ 0, 1, 2, \cdots, m-1\ \}$ en vinden berekeningen (optellen, vermenigvuldigen) modulo m plaats.

Bepaal de inverteerbare elementen modulo 7 en bepaal van alle inverteerbare elementen de inverse. Idem modulo 10.

76)
- **a.** Maak een optel- en vermenigvuldigingstabel van $\mathbb{Z}_4$
- **b.** Bepaal de inverteerbare elementen van $\mathbb{Z}_4$
- **c.** Laat zien dat $x^4 \equiv x^2$ modulo 4 voor elke $x \in \mathbb{Z}_4$.
- **d.** Bewijs dat $x^4 - x^2$ deelbaar is door 4 voor elke $x \in \mathbb{Z}$.

77)
- **a.** Laat zien dat $x^{12} \equiv 1$ modulo 13 voor elke $x \in \mathbb{Z}_{13}$ met $x \neq 0$.
  Aanwijzing: wanneer je geen rekenmachine of andere hulpmiddelen gebruikt, is het handig om voor elke x achtereenvolgens x^2, x^3, x^6, x^{12} te berekenen.
- **b.** Bepaal de rest van $100^{100} + 1000^{1000}$ bij deling door 13.

78) Begin de reeks 'Psibonacci'-getallen met $\psi_0 = 2$ en $\psi_1 = 1$, en de bij Fibonacci-getallen gebruikelijke recurrentie, dus $\psi_n = \psi_{n-1} + \psi_{n-2}$ voor $n \geq 2$.
Wat is het *laatste cijfer* van het duizendste Psibonacci-getal ψ_{1000}?

79) Laat zien dat de volgende verzamelingen aftelbaar zijn:
- **a.** De verzameling $\mathbb{N} \times \{1, 2, 3\} = \{\ (x, y) \mid x \in \mathbb{N},\ y \in \{1, 2, 3\}\ \}$.
- **b.** $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{\ (x, y) \mid x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N}\ \}$.
- **c.** De verzameling van alle eindige binaire strings (rijtjes bestaande uit nullen en enen), genoteerd als $\{0, 1\}^*$.
- **d.** De verzameling van alle eindige rijtjes gehele getallen.

80) Laat zien:
- **a.** Als er een injectieve functie $f : A \to \mathbb{N}$ bestaat, dan is A aftelbaar.
- **b.** Elke deelverzameling van een aftelbare verzameling is aftelbaar.

81) Laat zien dat de volgende verzamelingen niet aftelbaar zijn.

a. De verzameling bestaande uit alle oneindige rijtjes nullen en enen; dat is meer formeel de verzameling van alle functies van $\mathbb{N}$ naar $\{0, 1\}$.

b. De verzameling van alle talen over het alfabet $\{0, 1\}$. Een *taal* over $\{0, 1\}$ is een deelverzameling van $\{0, 1\}^*$.