Rekenen met Tegels

Hendrik Jan Hoogeboom
Leiden

May 20, 2007

Dit zijn geannoteerde overhead transparanten voor een praatje over betegelingen, en de patronen die we kunnen leggen. Maar vooral ook hoe we kunnen rekenen met dit simpele concept.

De slides zelf zijn apart verkrijgbaar: www.liacs.nl/~hoogeboo/praatjes/tegels/

1 Inleiding

Regelmatige vullingen van het vlak worden bestudeerd door wiskundigen en theoretische informatici. Dat komt omdat zulke vlakvullingen bijzondere regelmatigheden kunnen vertonen, of juist het compleet ontbreken daarvan. Men heeft aangetoond dat met behulp van goed gekozen tegels een systeem te construeren is dat een model is voor een eenvoudige computer.

Patronen bestaande uit tegels lijken als natuurlijke structuren die schijnbaar zonder regie vanuit kleine onderdelen ontstaan (kristallen bijvoorbeeld).

(*Fig. 1*) Er bestaan werkelijk prachtige vlakvullingen met slechts enkele stukjes, waarvan men kan aantonen dat het patroon zichzelf niet regelmatig herhaalt. Hier de 'vlieger' en de 'pijl' van de wiskundige Penrose.

Wij zullen ons beperken tot vierkante tegels, gemodelleerd naar de klassieke legpuzzel.

(*Fig. 2*) De puzzelstukjes die we hier bekijken passen alleen naast elkaar als de zijden overeenkomen. Omdat het niet erg praktisch is om allerlei kartels te verzinnen, gebruiken we getallen om het type van de zijkant aan te geven. Alleen gelijke getallen passen. Puzzelstukjes mogen niet gedraaid worden.

Anders dan bij een gewone legpuzzel zijn er van elk stukje meerdere kopieen beschikbaar, zoveel als nodig.

Figure 1: kites and darts

Een setje puzzelstukjes kan gebruikt worden om aan elkaar te leggen met passende zijkanten. We kijken naar welke patronen zo kunnen ontstaan. Eerst zijn dat simpele patronen die zich herhalen. Later vereisen de patronen rekenwerk, wat de tegels voor ons zullen uitvoeren.

2 Patronen

(*Fig. 3*) We kunnen verschillende figuren leggen, meestal rechthoeken, maar we kunnen ook kijken of hoe het hele vlak betegeld kan worden (oneindig in alle richtingen) of bijvoorbeeld een kwadrant (een kwart vlak). Wanneer dat van toepassing is kunnen we speciale tegels ontwerpen om langs de rand te liggen, vergelijkbaar met de rechte kanten van een legpuzzel.

(*Fig. 5*) Het eerste patroon waar we tegels voor gaan ontwerpen bestaat uit een aantal gegolfde lijnen. Als we goed kijken zien we dat er slechts twee

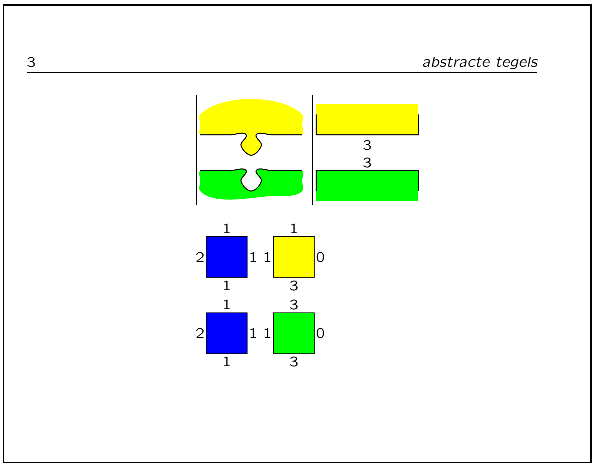

Figure 2: abstracte tegels

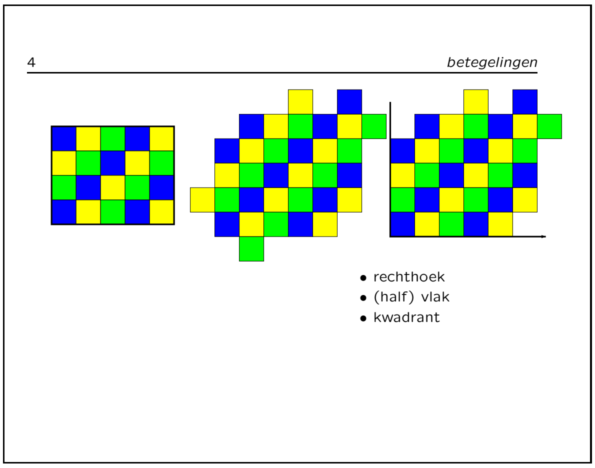

Figure 3: betegelingen

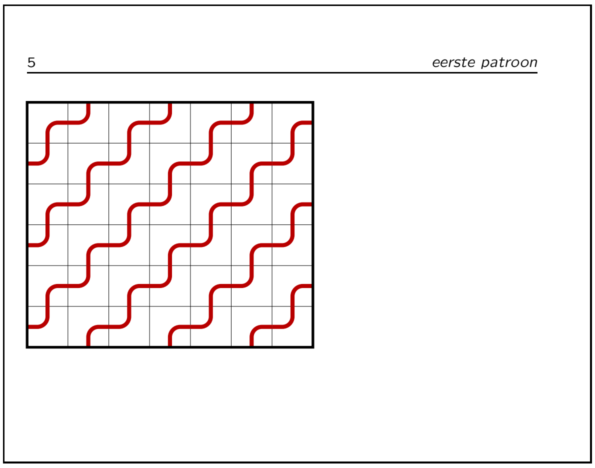

Figure 4: eerste patroon

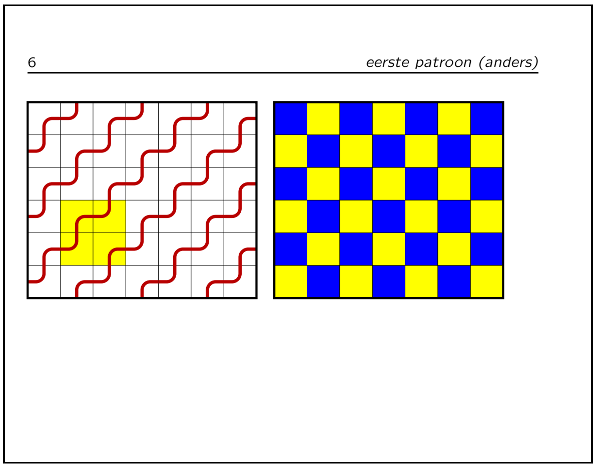

Figure 5: eerste patroon (anders)

'plaatjes' op de tegels staan. Om de regelmaat van het patroon beter te kunnen zien vervangen we de plaatjes door gekleurde vlakjes. We zien een afwisselend patroon, als op een schaakbord.

(*Fig. 6*) De tegeltjes moeten een alternerend patroon afdwingen, zowel horizontaal als vertikaal. Dat kunnen we doen via de zijden, die van 1 naar 0 'springen' en weer terug. Hoewel het patroon een herhaling is van een blok van twee-bij-twee (dus vier tegels omvat) heeft ons ontwerp slechts twee tegels nodig (afgezien van een lange rij tegels voor de randen). Eigenlijk mogen de tegels op elke positie langs de randen, de lange opsomming is zo'n beetje overbodig. Als we de eerste diagonale lijn links-boven willen laten lopen als in het voorbeels moeten we één tegel op die positie verbieden. Hiervoor is gekozen in dit voorbeeld.

(*Fig. 8*) Het tweede patroon bevat vier verschillende plaatjes op de tegels. Omdat twee opeenvolgende 'banen' van het patroon iets ten opzichte van elkaar verschoven zijn, ontstaat een wat ingewikkelder structuur dan van het vorige voorbeeld. Dit wordt duidelijk als we de plaatjes vervangen door kleuren.

(*Fig. 9*) Horizentaal herhalen zich steeds twee tegels, een verschillend tweetal voor de even en oneven rijen, terwijl vertikaal dezelfde reeks van vier repeteert.

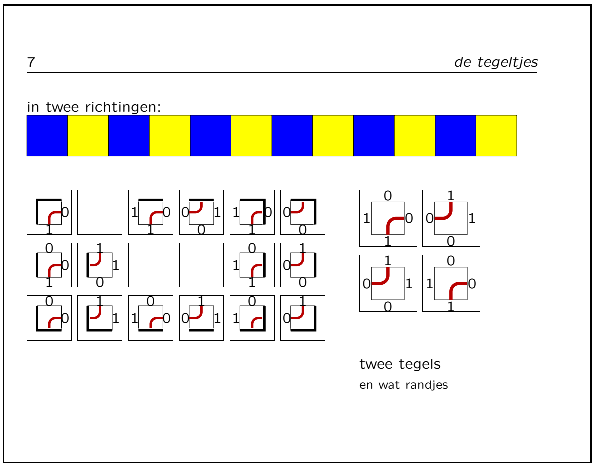

Figure 6: de tegeltjes

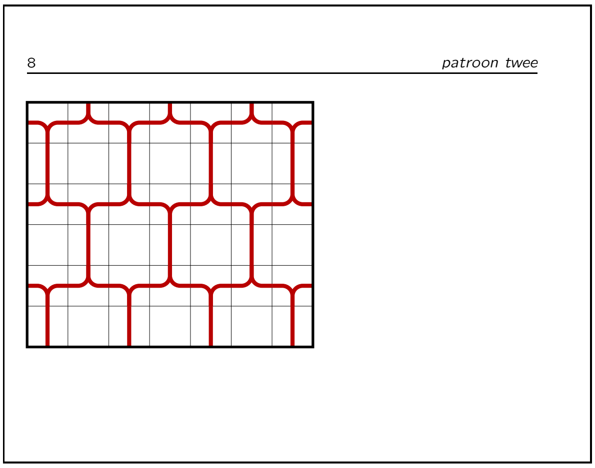

Figure 7: patroon twee

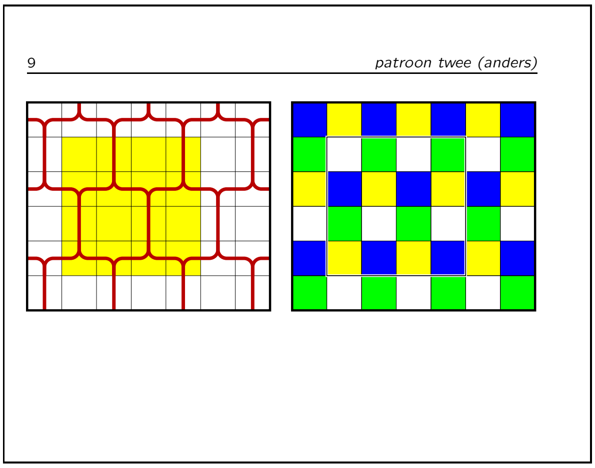

Figure 8: patroon twee (anders)

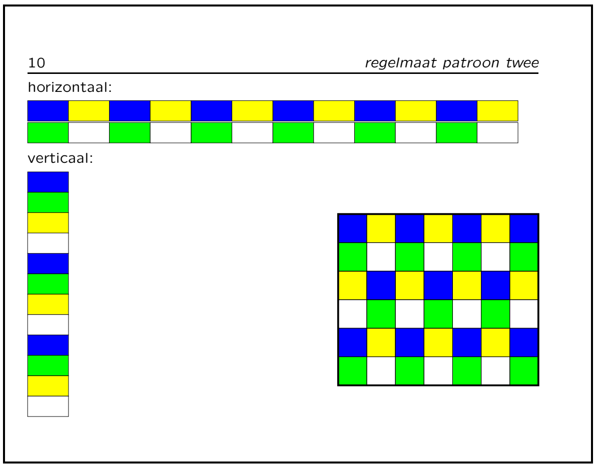

Figure 9: regelmaat patroon twee

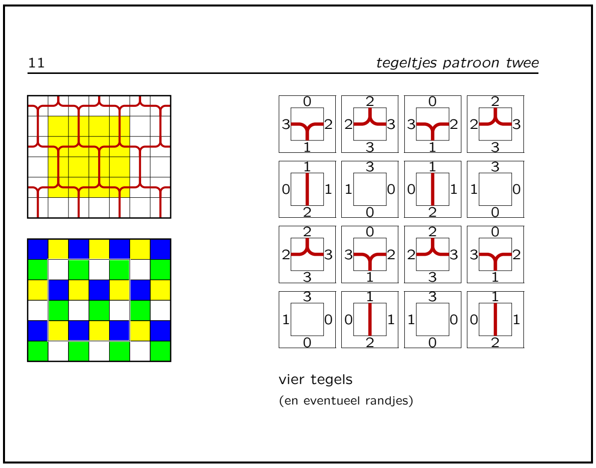

Figure 10: tegeltjes patroon twee

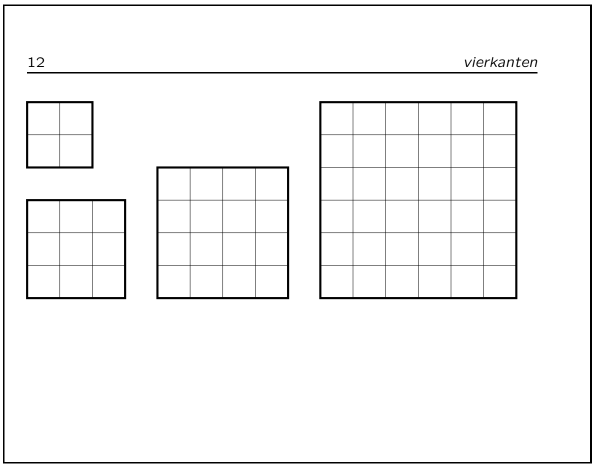

Figure 11: vierkanten

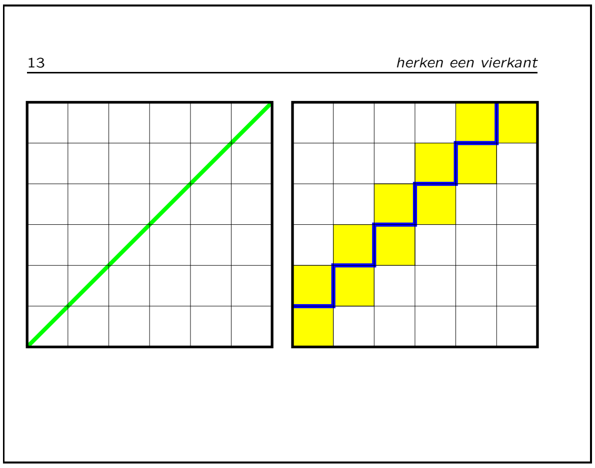

Figure 12: herken een vierkant

3 Vorm

(*Fig. 11*) In de eerste twee voorbeelden keken we naar patronen. Elke rechthoek met het gegeven patroon kon met de tegels gevormd worden. Hier kijken we naar betegelingen zonder patroon, maar waar de vorm van de rechthoek belangrijk is. Alleen vierkanten mogen gelegd worden.

(*Fig. 12*) Een rechthoek is een vierkant als de diagonaal keurig dwars over de tegels loopt, schuin omhoog. De tegels kunnen de diagonaal markeren met behulp van speciale getallen op de zijden. Niet precies diagonaal (daar raken de vierkantjes elkaar alleen op de hoekpunt) maar zigzaggend.

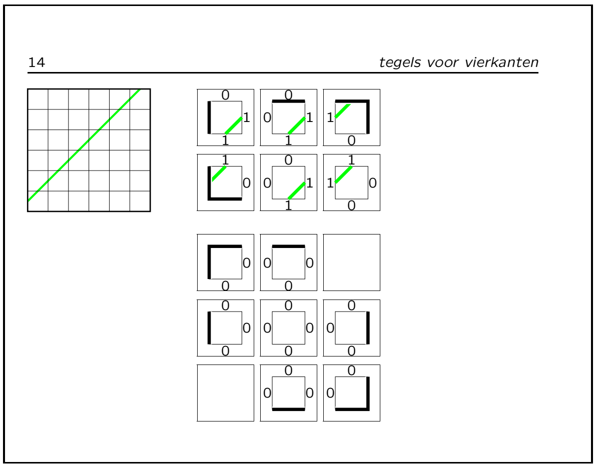

Figure 13: tegels voor vierkanten

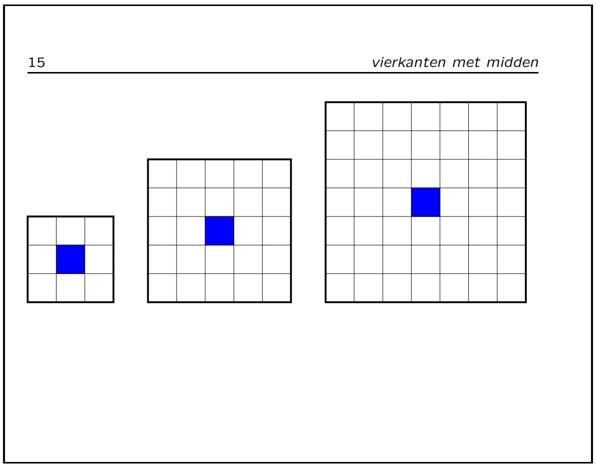

Figure 14: vierkanten met midden

(*Fig. 14*) Nu brengen we weer wat kleur in de puzzel. We willen alle vierkanten maken met een blauw middelste hokje. Om dat midden vast te kunnen leggen kijken we alleen naar oneven lengte.

(*Fig. 15*) De methode is als hiervoor. Eén diagonaal legt een vierkant vast. De andere is nodig om het midden te bepalen. Eigenlijk is dit schema al voldoende om te begrijpen dat deze patronen in tegels vertaald kunnen worden. We doen het voor de volledigheid.

(*Fig. 17*) We vervolgen met vierkanten die in elke rij en in elke kolom precies één blauw vakje hebben. We noemen dat 'toren vierkanten' omdat dir precies de manier is waarop we op een schaakbord

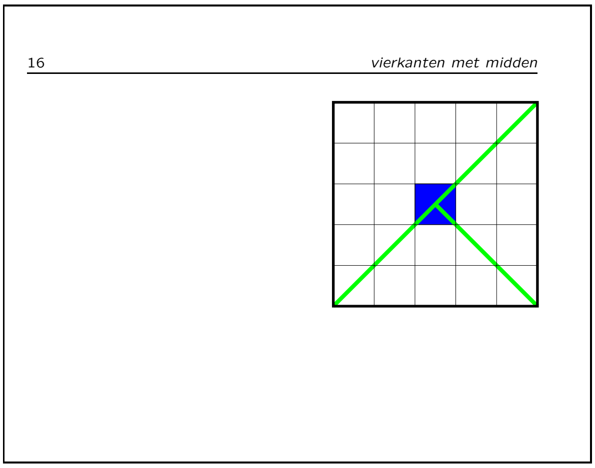

Figure 15: vierkanten met midden

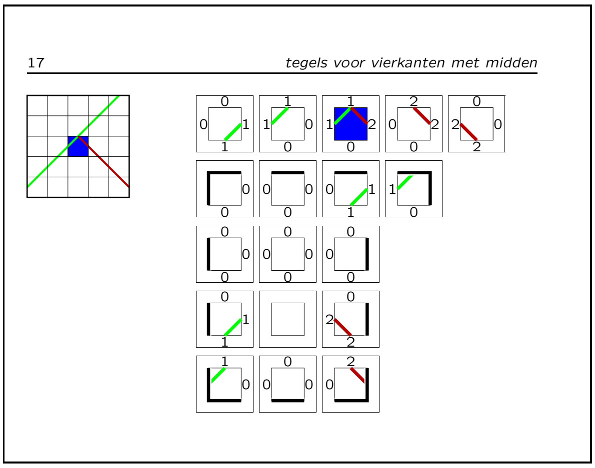

Figure 16: tegels voor vierkanten met midden

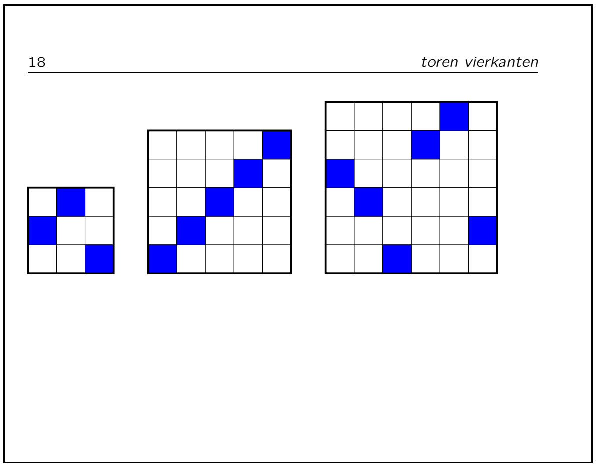

Figure 17: toren vierkanten

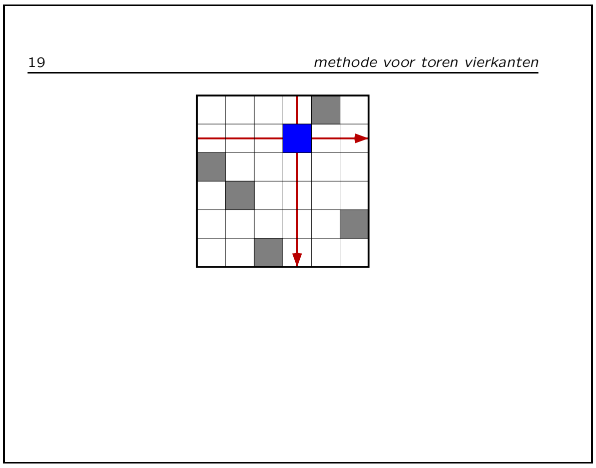

Figure 18: methode voor toren vierkanten

torens kunnen plaatsen die elkaar niet slaan. Gebruik weer de mogelijkheid van de stukjes om informatie via de zijden aan elkaar door te geven. Wat is hier de informatie?

(*Fig. 18*) De zijden van de tegeltjes geven elkaar door of er in de rij (resp. in de kolom) al een blauw tegeltje is gezien. Links (bovenaan) is dat niet het geval, maar rechts (onderaan) moet dat wel het geval geweest zijn. Witte tegeltjes geven de informatie 'wel/niet gezien' ongewijzigd door, blauwe tegeltjes veranderen 'niet' in 'wel' (in beide richtingen).

(*Fig. 20*) Twee thema's die verrassenderwijs getegeld kunnen worden, beide gaan uit van betegelingen met witte en blauwe tegels. De eerste

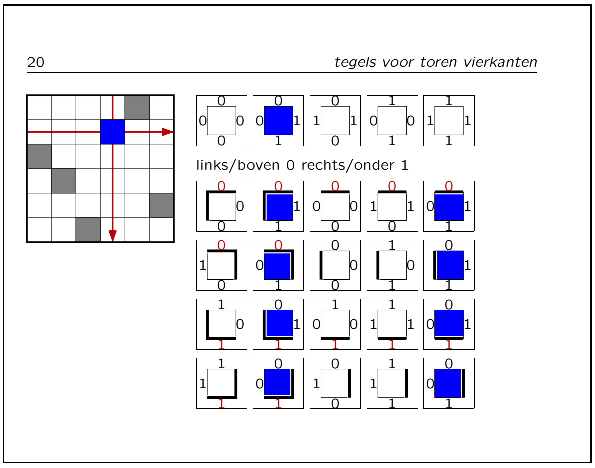

Figure 19: tegels voor toren vierkanten

eist dat alle blauwe tegels verbonden zijn (het blauwe deel is samenhangend) via de zijden van de tegels. Dit is mogelijk door een boomstructuur in de blauwe tegels aan te brengen die alle tegels met de eerste tegel moeten verbinden. Het is dan nog een hele klus om te vermijden dat er losse blauwe eilanden ontstaan, bestaande uit tegels die in een cirkel naar elkaar wijzen.

Het tweede thema eist dat er evenveel blauwe als zwarte tegels zijn. Dat is lastig omdat de kleuren door elkaar heen kunnen liggen of juist gescheiden. In principe kunnen tegels juist niet ‘tellen’. Als we de hoogte van de rechthoeken vast zouden nemen, zeg bv. 10 hokjes, dan lukt het niet (en dat kan bewezen worden). Om deze patronen te kunne leggen is een zekere minimale verhouding tussen hoogte en breedte nodig.

Klaus Reinhardt: On some recognizable picture-languages, 23th MFCS, 1998.

Klaus Reinhardt: The #a = #b pictures are recognizable, 18th STACS, 2001.

4 Rekenen

(*Fig. 21*) Nu zijn de stukjes gegeven, en kan gekeken worden welke patronen hermee gelegd kunnen worden. Er zijn vier stukjes die met hun gekleurde zijkanten op elkaar moeten passen. Niet alle stukjes mogen aan de zijkanten van de rechthoek gelegd worden. In de linkerbovenhoek bijvoorbeeld past slechts één stukje. Maak bijvoorbeeld een

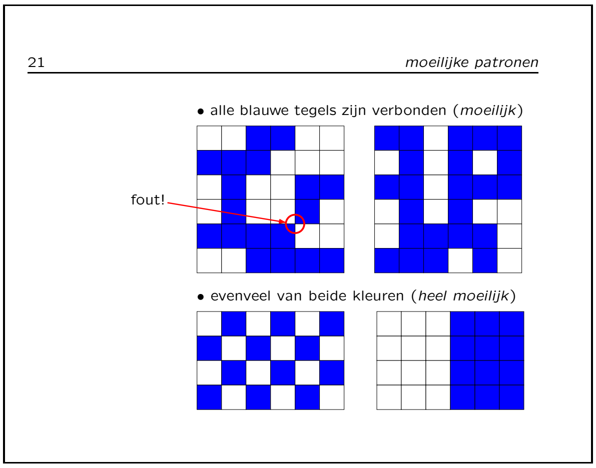

Figure 20: moeilijke patronen

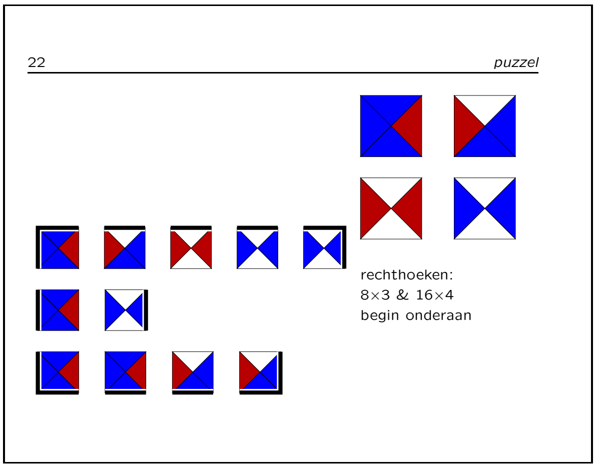

Figure 21: puzzel

rechthoek van acht breed en drie hoog. Als je aan de onderkant begint levert dat niet zoveel problemen op. De rechthoek van 16 bij 4 bestaat in principe uit twee kleinere rechthoeken aan elkaar gelegd.

(*Fig. 23*) Het patroon van de oplossing wordt duidelijk als we de kleur aan de rechterkant van de tegels uitlichten, of beter nog, als we die kleur met nul of een weergeven. De figuur van 16 breed blijkt dan alle getallen van nul tot 15 binair af te tellen.

(*Fig. 25*) De tegels uit dit voorbeeld zijn niet toevallig zo gekozen. Ze zijn ontworpen om herhaald door twee te delen (van onder naar boven gezien). De ‘flow’ van de informatie is zichtbaar in een kale

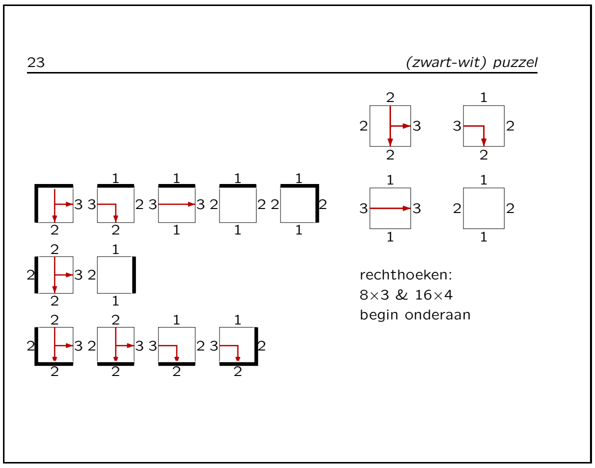

Figure 22: (zwart-wit) puzzel

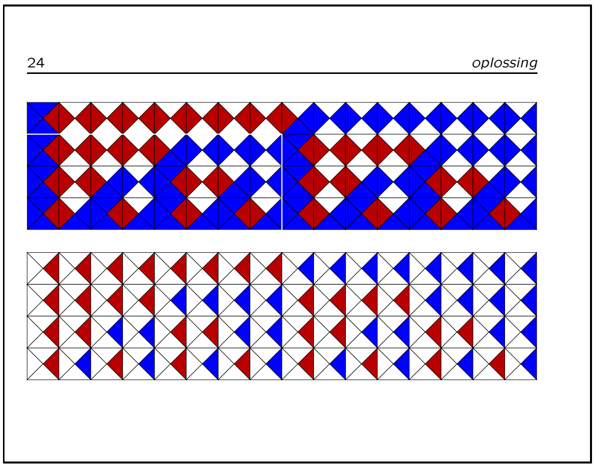

Figure 23: oplossing

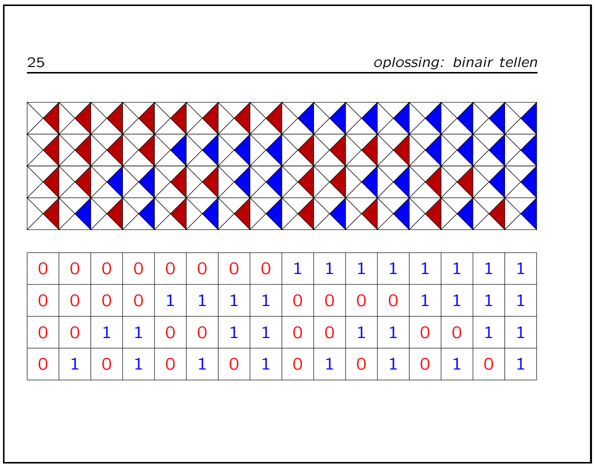

Figure 24: oplossing: binair tellen

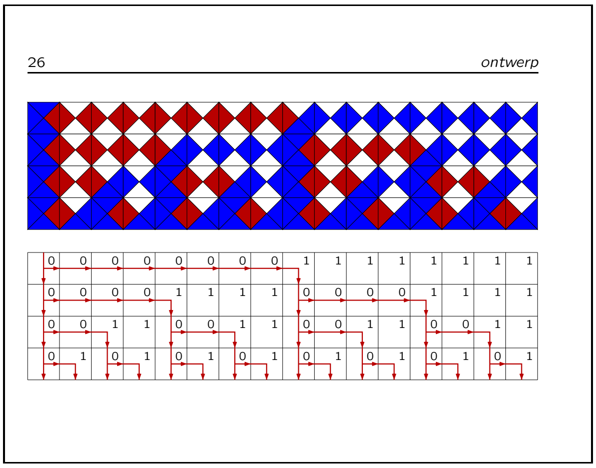

Figure 25: ontwerp

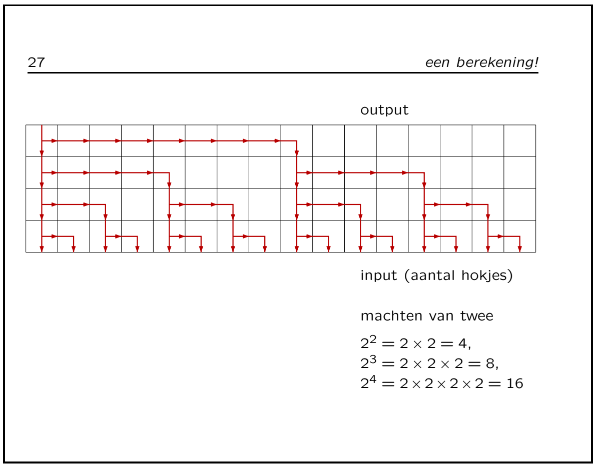

Figure 26: een berekening!

representatie van dezelfde tegels. Kortom: deze tegels rekenen! Ze bepalen of een getal (aangegeven door de rij onderste tegels) een macht van twee is.

(*Fig. 27*) Een ander vorbeeld van een berekening is het testen of een reeks symbolen een bepaalde structuur heeft. Hier wordt een methode geschetst die nagaat of een reeks symbolen (de kleuren op de onderste rij) bestaat uit twee keer hetzelfde patroon. Het voorbeeld is een simpel geval van 'pattern matching'.

De lijnen geven aan hoe de informatie stroomt. Expliciete tegels worden niet gegeven. We nemen aan dat dit concept werkt.

(*Fig. 28*) "Met tegels kun je rekenen" Wat we

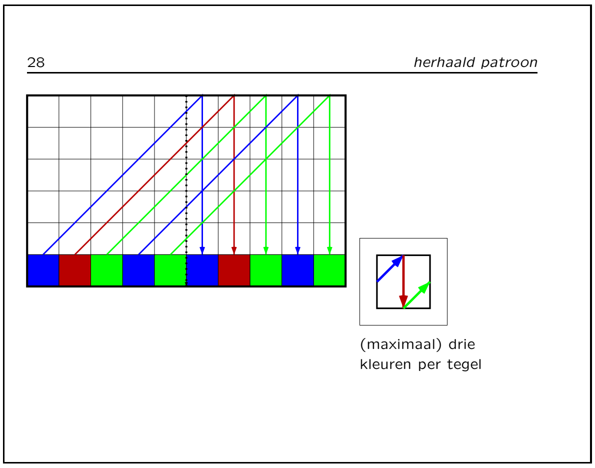

Figure 27: herhaald patroon

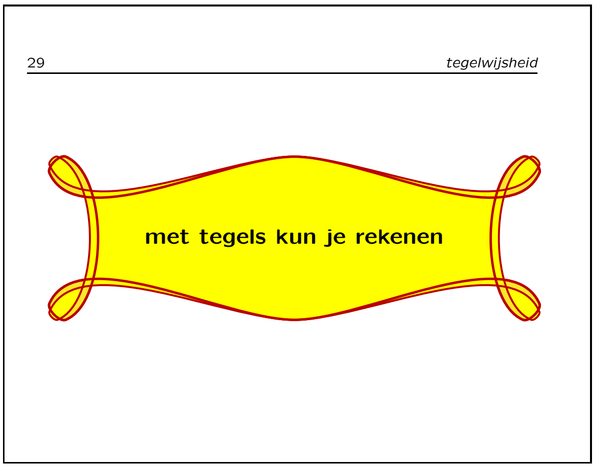

Figure 28: tegelwijsheid

opgestoken hebben past precies op een mooi tegeltje

5 Cellulaire Automaten

(*Fig. 29*) Cellulaire automaten zijn een populair rekenmodel. De automaat bestaat uit een (in principe oneindig lange) rij cellen. Elke cel heeft een kleur (of toestand). Op het tikken van een klok verandert elke cel van kleur, op basis van een stel regels. Die regels beschrijven hoe de nieuwe kleur bepaald moet worden op grond van de huidige kleur van een cel en die van de twee buren. Als er twee kleuren zijn, moeten er $2^3 = 8$ regels zijn, voor elk mogelijk drietal kleuren één. De sport is nu om te

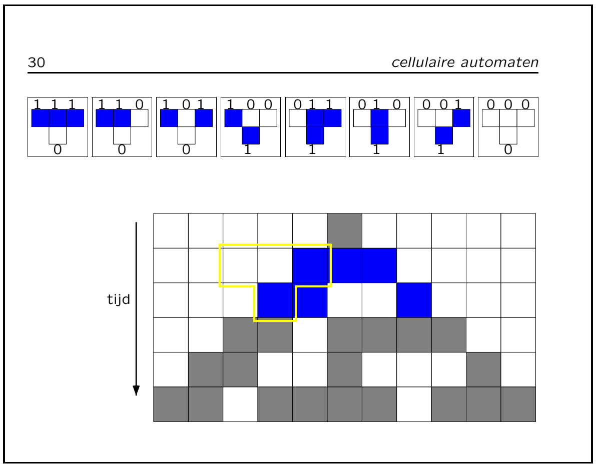

Figure 29: cellulaire automaten

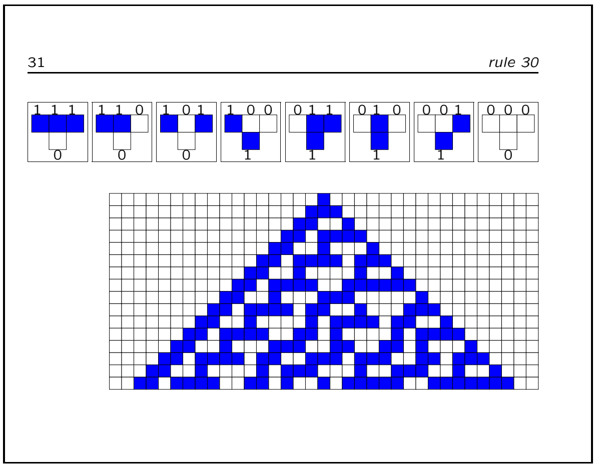

Figure 30: rule 30

kijken welke patronen ontstaan als we de ontwikkeling van de rij cellen bijhouden gedurende de tijd.

(*Fig. 31*) Interessante regels volgens de site van Wolfram, http://mathworld.wolfram.com/ ElementaryCellularAutomaton.html De nummering is via het binaire getal dat ontstaat als we de achtereenvolgende kleuren van de regels coderen als reeks nullen en enen. Het voorbeeld uit de lezing is regel 30.

$30 = 00011110$, $54 = 00110110$
$60 = 00111100$, $62 = 00111110$
$90 = 01011010$, $94 = 01011110$
$102 = 01100110$, $110 = 01101110$
$122 = 01111010$, $126 = 01111110$

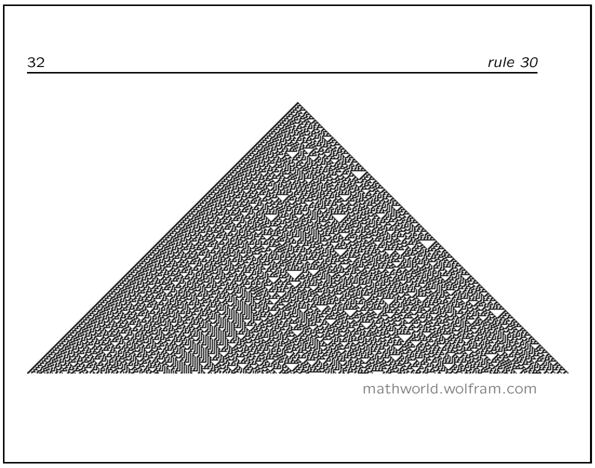

Figure 31: rule 30

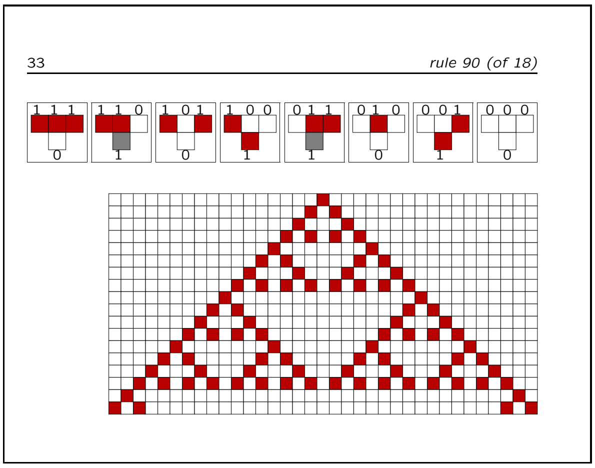

Figure 32: rule 90 (of 18)

150 = 10010110, 158 = 10011110
182 = 10110110, 188 = 10111100
190 = 10111110, 220 = 11011110
250 = 11111010

Nu is deze waarde niet willekeurig als voorbeeld gekozen. Regel 30 geeft een van de onvoorspelbare, onregelmatige patronen. Andere patronen zijn juist fraai regelmatig, soms varianten van de fractale Sierpinski driehoek. Weer andere zijn totaal oninteressant omdat ze niets opleveren of een enkele zwarte lijn.

(*Fig. 32*) Vooruit, regel 90 om te laten zien dat Sierpinski echt optreedt. Net als bij regel 30 is de figuur is gegenereerd door Bob met een spreadsheet. Echt waar.

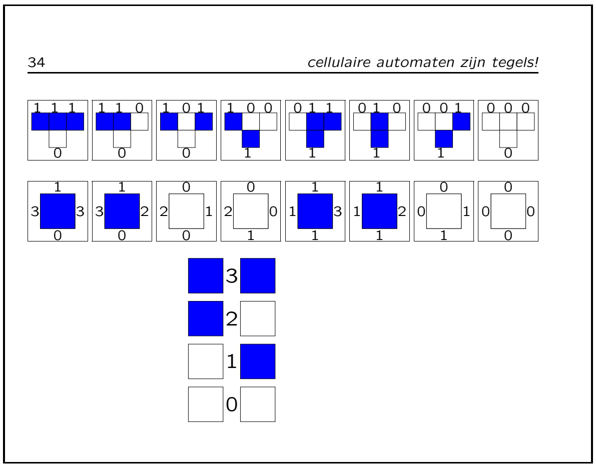

Figure 33: cellulaire automaten zijn tegels!

(*Fig. 33*) Cellulaire automaten lijken erg op systemen van tegels. Horizontaal tussen de tegels kiezen we cijfers die de kleuren van de twee buren coderen (zie plaatje). Dan ‘weten’ beide tegels elkaars kleuren. In de vertikale richting wordt gewoon de kleur van de volgende laag doorgegeven zoals bepaald door de regels van de cellulaire automaat.

(*Fig. 34*) Onlangs zocht ik al googelend plaatjes om dit werkstuk mee te illustreren. Ik kwam op de site van Stephen Wolfram terecht, de maker van de wiskundige software Mathematica. Wolfram is bezeten van het feit dat eenvoudige regels tot onregelmatigheden kunnen leiden. Zijn “regel 30” is een voorbeeld, maar hier is iets wat op een tegelsysteem lijkt. Als ik het goed begrijp definieren de tegelregels rechts alle mogelijke toegestane patronen. De figuur links toont dan een gedeelte van de gedefinieerde figuur. Zien we hier de binaire getallen?

6 Toetje

(*Fig. 35*) Als toetje, omdat het zo’n mooi plaatje is, een fascinerende betegeling.

De ’Hilbert curve’ is een bekende kromme die recursief gedefinieerd wordt. Elke volgende stap van de kromme bestaat uit vier kopieen van de vorige stap, gedraaid en aan elkaar verbonden. Deze krommen zijn enerzijds voorspelbaar omdat het recept van

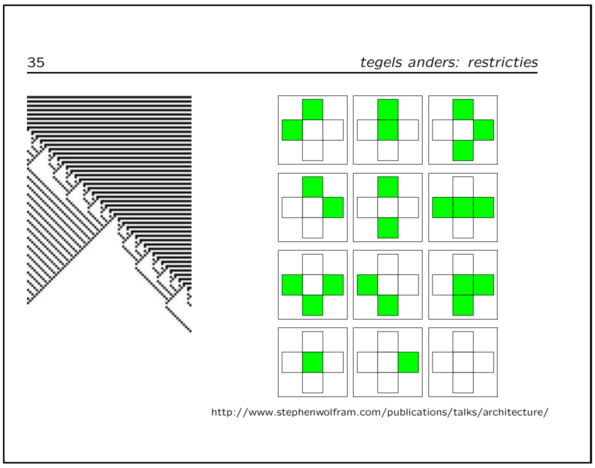

Figure 34: tegels anders: restricties

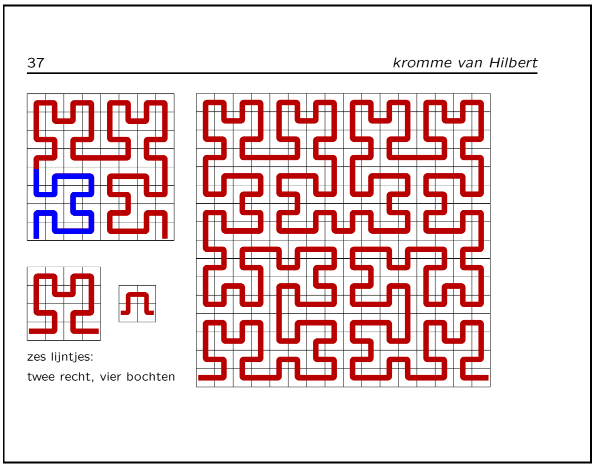

Figure 35: kromme van Hilbert

elk punt uit het vierkant precies vastligt, maar anderzijds zijn de regelmatigheden lastig te vatten.

Ook voor deze figuren (de opeenvolgende Hilbert krommen) is een set tegels gevonden. Dat vergt meer dan een regenachtige zondagmiddag.