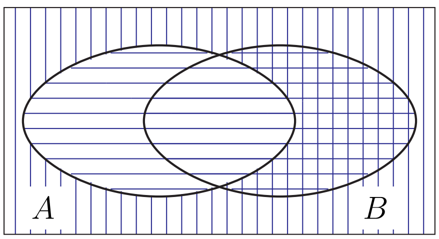
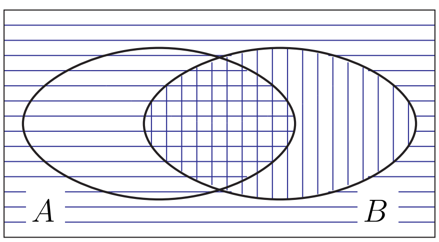
De in totaal 19 onderdelen van dit tentamen zijn elk $\frac{1}{2}$ punt waard. Plus $\frac{1}{2}$ startpremie.

Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) a. Laat met behulp van Venn-diagrammen zien dat

$$B \cap ((A \cup B) \cap A^c)^c = A \cap B$$

Teken ten minste twee Venn-diagrammen om duidelijk te maken welk gebied de verzameling links van de gelijkheid voorstelt, waaronder een waaruit je afleidt wat $(A \cup B) \cap A^c$ is.

> Zoals de opgave ons opdraagt, beginnen we met het construeren van $(A \cup B) \cap A^c$.
>
> 
>
>
> $\equiv$ $A \cup B$
> $|||$ A^c
>
> De gevraagde doorsnede is hierboven dubbel gearceerd. In de volgende figuur gaan we uit van het complement van dat gebied.
>
> 
>
>
> $\equiv$ $((A \cup B) \cap A^c)^c$
> $|||$ B
>
> De linker vezameling van de gelijkheid in de opgave is hier nu dubbel gearceerd. Dat gebied is duidelijk gelijk aan de doorsnede $A \cap B$, waarmee de gelijkheid bewezen is.

b. Gebruik nu de regels van de verzamelingenalgebra om bovenstaande gelijkheid te bewijzen. Pas één axioma tegelijk toe en benoem de gebruikte regels.

> $B \cap ((A \cup B) \cap A^c)^c =$ commutativiteit
> $B \cap (A^c \cap (A \cup B))^c =$ distributiviteit
> $B \cap ((A^c \cap A) \cup (A^c \cap B))^c =$ complement
> $B \cap (\varnothing \cup (A^c \cap B))^c =$ eenheid
> $B \cap (A^c \cap B)^c =$ De Morgan
> $B \cap ((A^c)^c \cup B^c) =$ dubbel complement
> $B \cap (A \cup B^c) =$ distributiviteit
> $(B \cap A) \cup (B \cap B^c)) =$ complement
> $(B \cap A) \cup \varnothing) =$ eenheid
> $B \cap A =$ commutatief

$A \cap B$

2) a. Wanneer is een relatie een equivalentierelatie? (Geef niet alleen de namen van de eigenschappen.)

De relatie R in A is een equivalentierelatie als deze de volgende eigenschappen bezit:

– reflexiviteit: xRx voor alle $x \in A$

– symmetrie: als xRy dan yRx voor alle $x, y \in A$

– transitiviteit: als xRy en yRz dan xRz voor alle $x, y, z \in A$

b. De relatie $\sim$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is gedefinieerd als: $(m, n) \sim (k, \ell)$ dan en slechts dan als $m + \ell = n + k$. Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

Controleer de drie eigenschappen.

reflexiviteit. $(m, n) \sim (m, n)$, want $m + n = n + m$.

symmetrie. Stel $(m, n) \sim (k, \ell)$ dus $m + \ell = n + k$. We moeten laten zien dat $(k, \ell) \sim (m, n)$ ofwel $k + n = \ell + m$, maar dat volgt eenvoudig.

transitiviteit. Stel $(m, n) \sim (k, \ell)$ en $(k, \ell) \sim (p, q)$. We weten dus dat $m + \ell = n + k$ en dat $k + q = \ell + p$. Nu moeten we laten zien dat $(m, n) \sim (p, q)$ ofwel $m + q = n + p$. Tel de twee gelijkheden links en rechts op: $(m + \ell) + (k + q) = (n + k) + (\ell + p)$, en dan krijgen we inderdaad $m + q = n + p$ als we $\ell + k$ wegstrepen.

Al deze berekeningen gaan een stuk intuitiever als we voor $(m, n) \sim (k, \ell)$ in plaats van $m + \ell = n + k$ rekenen met $m - n = k - \ell$. Dan volgt uit $(m, n) \sim (k, \ell)$ en $(k, \ell) \sim (p, q)$ dat $m - n = k - \ell$ en ook $k - \ell = p - q$. Dan meteen $m - n = p - q$ ofwel $(m, n) \sim (p, q)$.

c. Schets de equivalentieklassen van $\sim$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

De equivalentieklasse van $(0, 0)$ is gelijk aan $(0, 0) \sim (1, 1) \sim (2, 2) \sim \ldots$.

Op dezelfde manier $(m + 0, n + 0) \sim (m + 1, n + 1) \sim (m + 2, n + 2) \sim \ldots$.

De equivalentieklassen zijn dus de 'lange' oneindige diagonalen in het rooster van natuurlijke getallenparen. (Plaatje)

3) Definieer $A = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$ en $B = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$.

a. Bewijs dat $A \cup B$ aftelbaar is door expliciet een bijectie van $\mathbb{N}$ naar $A \cup B$ te geven.

De verzameling A bestaat uit getallen van de vorm $3 \cdot n$ met $n \geq 1$, en de verzameling B uit getallen van de vorm 2^n met $n \geq 0$.

n	0	1	2	3	4	5
	$3 \cdot 1$	2^0	$3 \cdot 2$	2^1	$3 \cdot 3$	2^2

Omdat A en B geen elementen gemeenschappelijk hebben (een lege doorsnede) kunnen we $A \cup B$ expliciet opsommen door de elementen om-en-om te geven als beeld. We moeten de index n een beetje verschuiven om de juiste waarde te geven.

$f(n) = \begin{cases} 3 \cdot (\frac{n}{2} + 1) & n \text{ even} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ oneven} \end{cases}$

b. Bewijs dat $A \times B$ aftelbaar is door een aftelling van $A \times B$ aan te geven.

Het Cartesisch product $A \times B$ bestaat uit alle paren $(3{\cdot}i, 2^j)$ met $i \geq 1$ en $j \geq 0$. Deze kunnen we in een oneindig bij oneindig array plaatsen en opsommen door te Cantor-wandelen, de elementen te bezoeken langs de (eindige) diagonalen. Teken een plaatje.

c. Laat nu X aftelbaar zijn, en Y en Z overaftelbaar. Leg uit welke van de volgende beweringen altijd waar zijn (onafhankelijk van X, Y, Z). Geef voor de overige beweringen een tegenvoorbeeld.

(i) $X \cup Y$ is aftelbaar **(ii)** $Y \setminus X$ is overaftelbaar **(iii)** $Y \cap Z$ is overaftelbaar

(i) Niet waar. Tegenvoorbeeld $X = \mathbb{N}$ en $Y = \mathbb{R}$, dan $X \cup Y = \mathbb{R}$. We weten dat de reële getallen overaftelbaar zijn. De bewering is trouwens nooit waar. Als $X \cup Y$ aftelbaar zou zijn dan ook haar deelverzameling Y.

(ii) Waar. Bewijs door middel van tegenspraak. Als $Y \setminus X$ aftelbaar zou zijn, dan is ook de vereniging $Y = (Y \setminus X) \cup X$ van twee aftelbare verzamelingen weer aftelbaar.

(iii) Niet waar. De doorsnede van de twee verzamelingen kan leeg zijn, bijvoorbeeld in het geval dat Y de machtsverzameling van de even (natuurlijke) getallen is, en Z de machtsverzameling van de oneven getallen. De (on)even getallen zijn oneindig aftelbaar (gelijkmachtig met $\mathbb{N}$), en de machtsverzameling daarvan is overaftelbaar (gelijkmachtig met $\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

4) a. Bewijs met volledige inductie dat $5^n - 4n - 1$ deelbaar is door 16 voor elke $n \geq 0$. Leg uit welke stappen je neemt.

Dit bewijzen we met volledige inductie.

Basis. Voor $n = 0$ geldt dat $5^n - 4n - 1 = 5^0 - 4{\cdot}0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$ deelbaar is door 16.

Inductiestap. We gebruiken de hypothese dat $5^n - 4n - 1$ deeelbaar is door 16. Daarmee bewijzen we de bewering voor $n + 1$.

Dus kijken we naar $5^{n+1} - 4(n+1) - 1 = 5{\cdot}5^n - 4n - 5$. We werken nu naar de oorspronkelijke uitdrukking toe. $5{\cdot}5^n - 4n - 5 = 5{\cdot}(5^n - 4n - 1) + 16n$

In deze uitdrukking is $5{\cdot}(5^n - 4n - 1)$ deelbaar door 16 omdat $5^n - 4n - 1$ deelbaar is door 16 (inductie-aanname) en ook $16n$ is deelbaar door 16. Daarom is de som ook deelbaar door 16. (klaar)

b. **(i)** Bereken in $\mathbb{Z}_{16}$ de waarde voor 5^k voor $k = 0, 1, \ldots, 4$.

In $\mathbb{Z}_{16}$ rekenen we modulo 16, maar mogen als antwoord alleen de getallen $0, 1, \ldots, 15$ gebruikt worden. Het is *niet* de bedoeling om eerst $5^4 = 625$ uit te rekenen en dan modulo 16 te kijken: gebruik de eigenschappen van modulo!
$5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25 \equiv 9$,
$5^3 = 5 \cdot 5^2 \equiv 5 \cdot 9 = 45 \equiv 13$, $5^4 = 5 \cdot 5^3 \equiv 5 \cdot 13 = 65 \equiv 1$.

(ii) Gebruik **(i)** om **a.** te bewijzen.

Modulo 16 hebben we de volgende waardes voor 5^n en $4n + 1$.

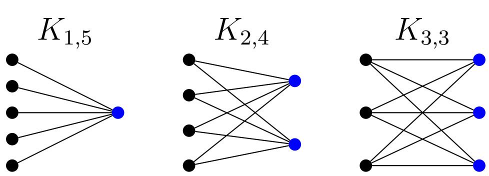
n	0	1	2	3	4	
5^n	1	5	9	13	1	steeds maal 5
$4n+1$	1	5	9	13	1	steeds plus 4

Dit zal zich zo blijven herhalen. Dus $5^n \equiv 4n + 1$ en daarmee $5^n - 4n - 1 \equiv 0 \pmod{16}$, ofwel $5^n - 4n - 1$ is deelbaar door 16.

5) Deze opgave gaat over samenhangende, ongerichte grafen. De onderdelen staan los van elkaar.

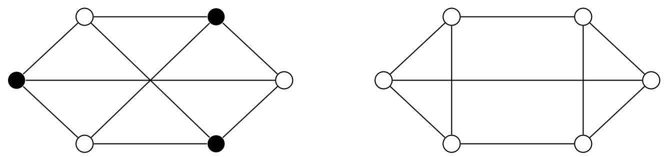
a. Hoeveel volledig bipartiete grafen bestaan er met 6 knopen? Leg je antwoord uit en teken ze allemaal.

Drie. De zes knopen moeten in twee verzamelingen verdeeld worden en daartussen worden alle lijnen getrokken. Omdat $6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$ zijn dit de grafen $K_{1,5}$, $K_{2,4}$, en $K_{3,3}$.

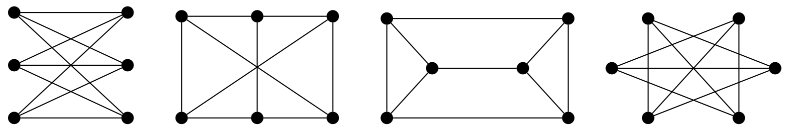


b. **(i)** Teken de twee niet-isomorfe 3-reguliere grafen met zes knopen.
Hint: het zijn allebei Hamiltongrafen.

Vanwege de hint kunnen we beginnen met een cykel van lengte zes door alle knopen. Om graad drie overal te krijgen moeten we de knopen nog twee aan twee verbinden. Dat kan op twee verschillende manieren. De linker en rechter graaf zijn verschillend want de graaf links is bipartiet (het is $K_{3,3}$) te zien aan de kleuring, terwijl de graaf rechts een cykel van lengte drie heeft (en dus niet bipartiet is).



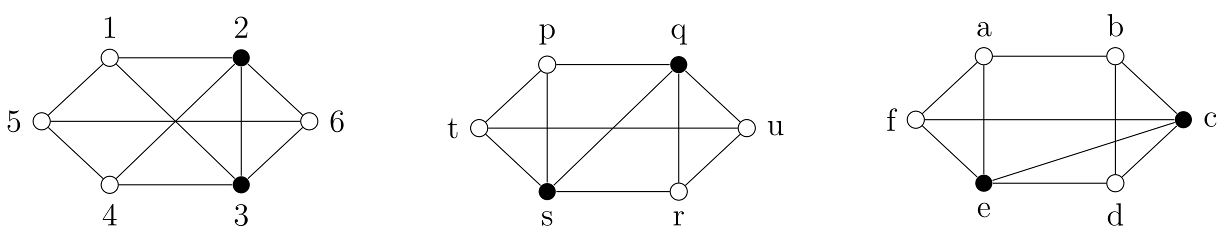
Die twee grafen kunnen op diverse manieren worden weergegeven, maar er zijn er slechts twee echt verschillend.



(ii) Bewijs: een k-reguliere graaf met k oneven heeft een even aantal knopen.

In een k reguliere graaf met n knopen is de totale graad $n{\cdot}k$. De som van de graden in een graaf moet even zijn, dus $n{\cdot}k$ is even. Omdat k oneven is in deze opgave, moet n even zijn.

Een variant van deze redenering is dat het aantal lijnen $\frac{n \cdot k}{2}$ een geheel getal moet zijn.



G_1 G_2 G_3

c. De grafen G_2 en G_3 hierboven zijn isomorf. Geef een isomorfisme.

Een homormofisme is een bijectie van de knopen van de ene graaf naar de ander zó dat de lijnen behouden blijven. (Als je er gevoel voor hebt beelden beide grafen een blok Toblerone uit met een diagonaal op één van de zijden.)

In G_2 zijn de knopen van graad vier q en s en in G_3 zijn dat c en e. Die hebben we hierboven alvast zwart gekleurd (dat was in de opgave niet zo).

Die proberen we op elkaar af te beelden. Kijk naar t en u, die zitten alleen aan s resp. q vast (de andere twee knopen p en r zijn gemeenschappelijke buren). Op dezelfde wijze zijn a en b de 'unieke' buren van e en d. Laten we die ook op elkaar afbeelden.

Tenslotte maken we de twee driehoeken links en rechts af. (En even goed nakijken.)

x	p	q	r	s	t	u
$\varphi(x)$	f	c	d	e	a	b

d. Geef een eenvoudig argument waarom G_1 niet isomorf is met de andere twee grafen.

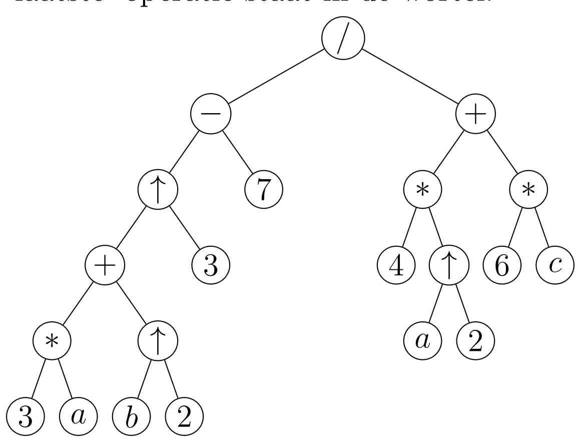
De grafen G_1 en G_2 hebben evenveel knopen, en dezelfde graden van die knopen en (dus) evenveel lijnen. Er is dus geen heel snelle oplossing. Het aantal driehoeken (cykels van lengte drie) verschilt wel, namelijk drie versus vier, maar er worden veel telfouten gemaakt.

Het makkelijkste is om te kijken hoe de knopen van graaf drie aan de knopen van graad vier vast zitten. In G_1 bijvoorbeeld is een knoop die niet aan de viergraders vastzit (knoop 5) terwijl in G_2 alle driegraders buur zijn van een viergrader. Ook: de viergraders in G_1 hebben drie gemeenschappelijke buren, terwijl in G_2 dat er maar twee zijn.

6) Beschouw de algebraïsche expressie: $E = \dfrac{(3a+b^2)^3 - 7}{(4a^2+6c)}$.

a. Teken de corresponderende geordende gewortelde boom T, waarbij je een pijl ($\uparrow$) gebruikt voor machtsverheffing, een sterretje ($*$) voor vermenigvuldiging, en een schuine streep (/) voor deling.

De operatoren $+, -, *, /, \uparrow$ zijn allemaal binair, dus hebben elk twee argumenten. De expressie wordt dus weergegeven door een (volle) binaire boom met in de interne knopen de operator en in de bladeren een constante of variabele. De 'laatste' operatie staat in de wortel.



b. Gebruik T om E te herschrijven in Poolse prefix notatie (preorde).

WLR of pre-orde via de omloop-methode, steeds het eerste bezoek.
$/ - \uparrow + * 3\, a \uparrow b\, 2\, 3\, 7 + * 4 \uparrow a\, 2 * 6\, c$

7) Gegeven zijn de talen $L = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ heeft deelwoord } aa\ \}$ en

$$M = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ heeft een oneven aantal } b\text{'s}\ \}.$$

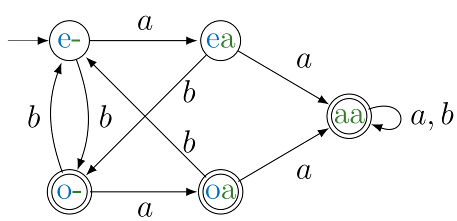
a. Teken een Venn-diagram met L en M en verdeel de woorden uit $\{a,b\}^*$ van lengte drie over de gebieden.

> Een Venn-diagram voor twee verzamelingen heeft *vier* gebieden. Daarin moet u acht (2^3) woorden van lengte drie plaatsen. [Plaatje]

De vereniging van L en M is de taal

$$K = \{ \ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ heeft deelwoord } aa, \text{ of } w \text{ heeft een oneven aantal } b\text{'s} \ \}$$

b. Geef een deterministische eindige automaat voor K.

> De toestanden van de automaat houden bij on/even aantal b's, en de stappen op weg naar aa: a gelezen, aa gelezen. Na aa wordt elk vervolg geaccepteerd ongeacht of het aantal b's even of oneven is.
>
> Let op dat er twee knopen *ea* en *oa* zijn, ook als we zojuist a gelezen hebben moeten we onthouden of het aantal b's (on)even is. Bij aa is dat niet langer belangrijk (maar het zou wel mogen).
>
> 
>

c. Toon aan dat $K^c = \{a, b\}^* \setminus K$ *regulier* is, dus druk K^c uit in eindige talen met behulp van de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).

Hint: welke woorden uit K^c hebben precies twee b's?

> De taal K^c bestaat uit woorden zonder deelwoord aa én een even aantal b's (De Morgan).
>
> De woorden met precies twee b's zijn: $bb, abb, bab, abab, bba, abba, baba, ababa$.
>
> Als we daar Kleene ster op toepassen krijgen we woorden met een even aantal b's maar er kunnen twee a's achter elkaar ontstaan: $bba \cdot abb$. Om dat te vermijden laten we de a's na de woorden weg, zo kan er tussen alle b's wel of geen b staan. Wel moeten we er aan denken dat uiteindelijk aan het eind nog een a kan komen (of niet).
>
> Dan krijgen we $\{bb, abb, bab, abab\}^* \cdot \{a, \lambda\}$