Foundations of Computer Science

Fundamentele Informatica 1

Hendrik Jan Hoogeboom
Jeannette de Graaf

Bachelor Informatica (& specialisaties)
Universiteit Leiden

Najaar 2020

Universiteit Leiden
Leiden Institute of Advanced Computer Science

Hoofdstuk 6

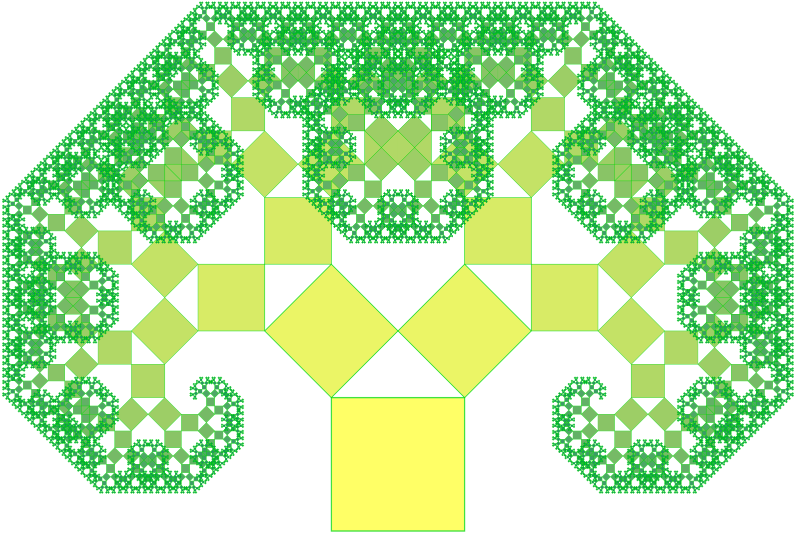
Recursie en Inductie

Overzicht

6 Recursie en Inductie

- Recursie!
- Recurrente betrekkingen
- Volledige inductie
- Escher en Droste☒

Pythagorasboom



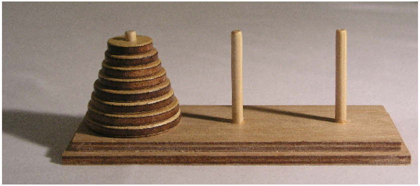
Albert E. Bosman (1942) Wikipedia, Gjacquenot,

torens van Hanoi	Algoritmiek
sorteren	Complexiteit
Backus-Naur-Form*	Programmeertalen
formules*	Logica
*context-vrije grammatica	Automata theory
Fibonacci reeks	Programmeermethoden (en FoCS)

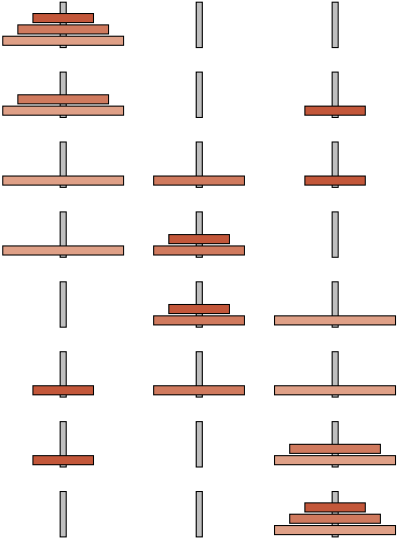
inductie
definitie / bewijsmethode
van klein naar groot
bottom-up

recursie
definitie / programmeren
in termen van zichzelf
top-down

soms een kwestie van perspectief . . .

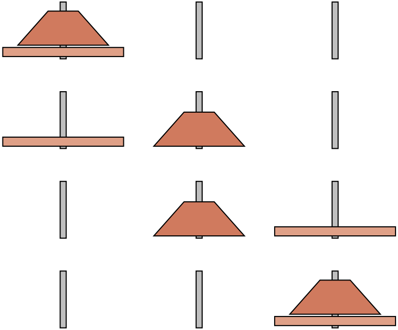


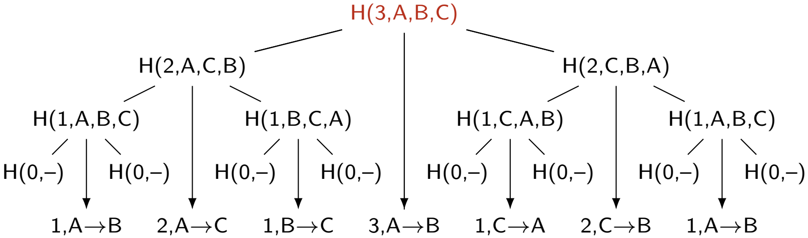
Édouard Lucas (1883)



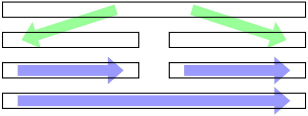
Hanoi

Hanoi(n,van,naar,via) ::=
    als $n > 0$
        Hanoi($n - 1$,van,via,naar)
        move(n,van,naar)
        Hanoi($n - 1$,via,naar,van)





Sorteer $A[L, R]$ ::=
verdeel $A[L, R]$ in $A[L, R']$ en $A[L', R]$
Sorteer $A[L, R']$
Sorteer $A[L', R]$
voeg $A[L, R']$ en $A[L', R]$ samen



quicksort							
3	7	8	5	2	1	9	4
3	1	2	4	5	8	9	7
1	2	3	4	5	7	9	8
1	2	3	4	5	7	8	9

Tony Hoare, 1959

mergesort							
3	7	8	5	2	1	9	4
3	7	5	8	1	2	4	9
3	5	7	8	1	2	4	9
1	2	3	4	5	7	8	9

John von Neumann, 1945

Backus–Naur Form *context-vrije grammatica*

$\langle$xxx$\rangle$ definitie concept `yyy` in programma

$$
\begin{aligned}
\langle \mathit{geheel} \rangle &::= \langle \mathit{teken} \rangle \langle \mathit{natuurlijk} \rangle \mid \langle \mathit{natuurlijk} \rangle \\
\langle \mathit{natuurlijk} \rangle &::= \langle \mathit{cijfer} \rangle \mid \langle \mathit{cijfer} \rangle \langle \mathit{natuurlijk} \rangle \\
\langle \mathit{cijfer} \rangle &::= \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \mid \mathtt{2} \mid \ldots \mid \mathtt{8} \mid \mathtt{9} \\
\langle \mathit{teken} \rangle &::= \mathtt{+} \mid \mathtt{-}
\end{aligned}
$$

$\langle$geheel$\rangle \Rightarrow \langle$teken$\rangle\langle$natuurlijk$\rangle \Rightarrow$ - $\langle$natuurlijk$\rangle \Rightarrow$ - $\langle$cijfer$\rangle\langle$natuurlijk$\rangle$
$\Rightarrow$ -3 $\langle$natuurlijk$\rangle \Rightarrow$ -3 $\langle$cijfer$\rangle\langle$natuurlijk$\rangle \Rightarrow$ -31 $\langle$natuurlijk$\rangle$
$\Rightarrow$ -31 $\langle$cijfer$\rangle\langle$natuurlijk$\rangle \Rightarrow$ -315 $\langle$natuurlijk$\rangle \Rightarrow$ -315 $\langle$cijfer$\rangle \Rightarrow$ -3157

$$\langle \textit{assignment} \rangle ::= \langle \textit{variable} \rangle \; \texttt{=} \; \langle \textit{expression} \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle \textit{statement} \rangle ::= {} & \langle \textit{assignment} \rangle \mid \\
& \langle \textit{compound-statement} \rangle \mid \\
& \langle \textit{if-statement} \rangle \mid \\
& \langle \textit{while-statement} \rangle \mid \ldots \\
\langle \textit{if-statement} \rangle ::= {} & \texttt{if} \; \langle \textit{test} \rangle \; \texttt{then} \; \langle \textit{statement} \rangle \mid \\
& \texttt{if} \; \langle \textit{test} \rangle \; \texttt{then} \; \langle \textit{statement} \rangle \; \texttt{else} \; \langle \textit{statement} \rangle \\
\langle \textit{while-statement} \rangle ::= {} & \texttt{while} \; \langle \textit{test} \rangle \; \texttt{do} \; \langle \textit{statement} \rangle
\end{aligned}$$

$PVar = \{p, q, r, \ldots, p_1, p_2, \ldots\}$

The formulas φ *of propositional logic are given by the following context free grammar, in which* p *ranges over the propositional variables PVar.*

$$\varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid (\varphi)$$

Reading conventions:

1. $\wedge$ *and* $\vee$ *have precedence over* $\rightarrow$
2. *all connectives associate to the right*

$$\varphi ::= \underbrace{p \mid \bot} \mid \underbrace{\varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid (\varphi)}$$

1. *Basis.* Formules zijn $\bot$ (*false*), en de propositievariabelen p in PVar.
2. *Inductiestap.* Als φ_1 en φ_2 formules zijn, dan ook $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ en (φ_1).

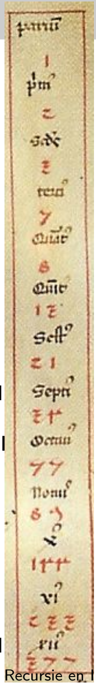
$$p \rightarrow \bot \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$p \rightarrow \bot \qquad (p \rightarrow q)$$

$$p \qquad \bot \qquad p \rightarrow q$$

$$p \qquad q$$

$p \wedge q \vee p = (p \wedge q) \vee p$ reading conventions



1
I
2
II
3
III
5
IV
8
V
13
VI
21
VII
34
VIII
55
IX
89
X
144
XI
233
XII
377

How many pairs of rabbits are created by one pair in one year

"One of these, namely the first, bears in the second month, and thus there are in the second month 3 pairs; of these in one month two are pregnant, and in the third month 2 pairs of rabbits are born, and thus there are 5 pairs in the month; in this month 3 pairs are pregnant, and in the fourth month there are 8 pairs, of which 5 pairs bear another 5 pairs; these are added to the 8 pairs making 13 pairs in the fifth month; "

engelse vert. Laurence Sigler (2002)

Leornardo di Pisa "Fibonacci" (Pisa, ∼1170 – ∼1250)
Liber Abaci (Rekenboek, 1202)
wikipedia

recurrente betrekking

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geqslant 2$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, . . .

reeks van *Fibonacci* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ OEIS A000045

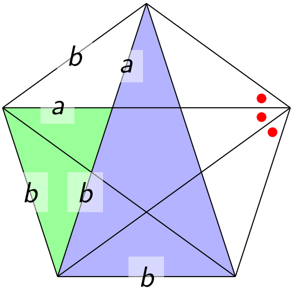
oplossing *formule van Binet* ⊠

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} .$$

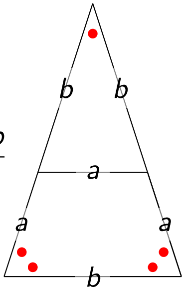
$$x^2 = x + 1$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$a,\ b,\ a+b$$



$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$$



6 Recursie en Inductie

- Recursie!
- Recurrente betrekkingen
- Volledige inductie
- Escher en Droste☒

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \qquad a(0), a(1), a(2), a(3), \ldots$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

recurrente betrekking

$$a_n = \text{in termen van } a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \text{ en } n$$

$a_n = \sum_{i=0}^{n} i \quad = \underbrace{a_{n-1}}_{\sum_{i=0}^{n-1} i} + n$ *inductief* gedefinieerd

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n \quad (n \geqslant 1) \end{cases}$$

0	1	3	6	10	15	21	28	36
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8

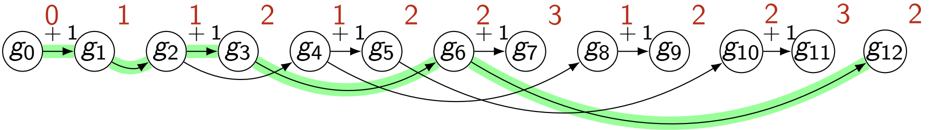
$$a_0 \xrightarrow{+1} a_1 \xrightarrow{+2} a_2 \xrightarrow{+3} a_3 \xrightarrow{+4} a_4 \xrightarrow{+5} a_5 \xrightarrow{+6} a_6 \xrightarrow{+7} a_7 \xrightarrow{+8} a_8$$

recursief bepaald *top-down*,

$$a_4 = a_3 + 4 \qquad\qquad = 6 + 4 = 10$$
$$a_3 = a_2 + 3 \qquad\qquad = 3 + 3 = 6$$
$$a_2 = a_1 + 2 \qquad\qquad = 1 + 2 = 3$$
$$a_1 = a_0 + 1 \qquad = 0 + 1 = 1$$
$$a_0 = 0$$

$$\begin{cases} g_0 = 0 \\ g_n = g_{n-1} + 1 & (n \geqslant 1, \text{n oneven}) \\ g_n = g_{n/2} & (n \geqslant 1, \text{n even}) \end{cases}$$

$g_{12} = g_6 = g_3 = g_2 + 1 = g_1 + 1 = g_0 + 1 + 1 = 0 + 2 = 2.$



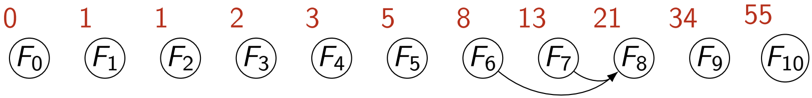
vraag: *wat* berekent $g(n) = g_n$ eigenlijk?

Fib iteratief

reeks van *Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ OEIS A000045

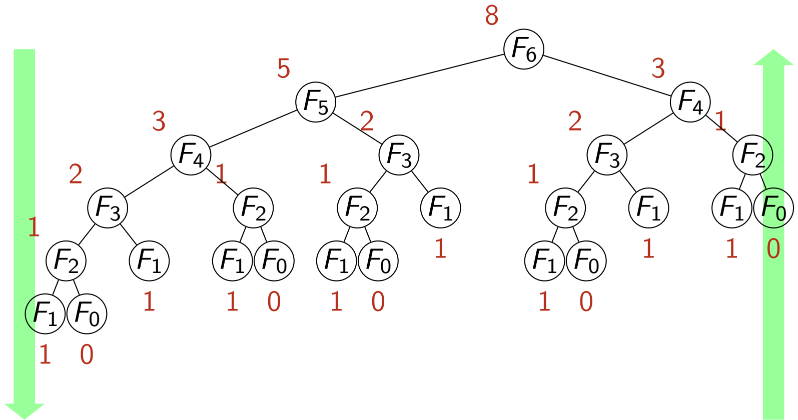
$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geqslant 2$$



zie Programmeermethoden

```
long fib3 (int n) { //
    long eerste = 1, tweede = 1, hulp;
    int teller;
    for ( teller = 2; teller <= n; teller++ ) {
        // eerste == fib (teller-2) en tweede == fib (teller-1)
        hulp = tweede;
        tweede = eerste + tweede;
        eerste = hulp;
    }//for
    return tweede;
}//fib3
```




```
long fib1 (int n) {// verschoven begin(!)
    if ( ( n == 0 ) || ( n == 1 ) )
        return 1;
    else
        return ( fib1 (n-1) + fib1 (n-2) );
}//fib1
```

recursief met matrices☒

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$Q^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$$

$$Q^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_k + F_{k-1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Q^{2n} & = Q^n\, Q^n \\ Q^{2n+1} & = Q^{2n}\, Q \end{cases}$$

$$Q^{10} = Q^5\, Q^5 \qquad Q^5 = Q^4\, Q \qquad Q^4 = Q^2\, Q^2 \qquad Q^2 = Q\, Q$$

$$\begin{bmatrix} 89 & 55 \\ 55 & 34 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$t_0 = 5 \quad t_1 = 6$

$t_n = t_{n-1} + 6t_{n-2} - 12n + 8 \quad (n \geqslant 2)$

lineaire recurrentie

$$t_2 = 6 + 6{\cdot}5 - 12{\cdot}2 + 8 = 20$$

$$t_3 = 20 + 6{\cdot}6 - 12{\cdot}3 + 8 = 28$$

geheim recept (☒Sch.6.8)

$$x^2 = x + 6$$

$$x = 3 \text{ of } x = -2$$

$t_n = 3^n + (-2)^n + 2n + 3$

oplossing / *gesloten formule*

$$t_2 = 3^2 + (-2)^2 + 2{\cdot}2 + 3 = 20$$

$$t_3 = 3^3 + (-2)^3 + 2{\cdot}3 + 3 = 28$$

volledige inductie formule is inderdaad oplossing

- reeksen recurrente betrekking
  1. *basis* $F_0 = 0$ $F_1 = 1$
  2. *inductie* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- formules $\varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \to \varphi \mid (\varphi)$
  1. *basis* formules $\bot$, en variabelen p
  2. *inductie* φ_1 en φ_2 formules, dan $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \to \varphi_2$ en (φ_1)
- talen (verzamelingen strings)
  1. *basis* $a, b \in L$
  2. *inductie* $x, y \in L$ dan $cxy \in L$

  a, b, caa, cab, ccabb, ccaacab

  cccaacabccabb

Overzicht

6 Recursie en Inductie
- Recursie!
- Recurrente betrekkingen
- Volledige inductie
- Escher en Droste

$f(n) = n^2 + n + 41$ Euler (1772)

priemgetallen

41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601, ...

toch niet ...

$f(41) = 41 \cdot 41 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$

tegenvoorbeeld

$5^n - 2^n$ is een drievoud voor $n \geqslant 0$

$$
\begin{aligned}
5^0 - 2^0 &= \quad 1-1 &&= 0\\
5^1 - 2^1 &= \quad 5-2 &&= 3\\
5^2 - 2^2 &= \; 25-4 &&= 21\\
5^3 - 2^3 &= 125-8 &&= 117\\
5^4 - 2^4 &= 625-16 &&= 609
\end{aligned}
$$

tegenvoorbeeld ? (nee)

gaat dit altijd goed ? (ja)

$5^n - 2^n$ is een drievoud voor $n \geqslant 0$

$$5^4 - 2^4 = 625{-}16 = 609$$

$5^5 - 2^5 = 5{\cdot}5^4 - 2{\cdot}2^4 =$
$5{\cdot}(5^4 - 2^4) + 3{\cdot}2^4$

$5^{n+1} - 2^{n+1} = 5{\cdot}5^n - 2{\cdot}2^n =$
$5{\cdot}(5^n - 2^n) + 3{\cdot}2^n$

drievoud   zonder uitrekenen

$5^n - 2^n$ is een drievoud voor $n \geqslant 0$

inductie-bewijs

1. *basis* $(n = 0)$
   $5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ is een drievoud
2. *inductiestap*
   inductie-aanname $5^n - 2^n$ is een drievoud $(n \in \mathbb{N})$
   laat nu zien dat $5^{n+1} - 2^{n+1}$ is een drievoud

$5^{n+1} - 2^{n+1} = 5 \cdot (5^n - 2^n) + 3 \cdot 2^n$ is een drievoud

want $5^n - 2^n$ is een drievoud (inductie-aanname)
en $3 \cdot 2^n$ ook

principe van volledige/natuurlijke inductie

$\mathbb{N}$ natuurlijke getallen

$P(n)$ eigenschap

1. *basis*
   bewijs $P(0)$ of $P(m)$
2. *inductiestap*
   bewijs, voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$
   als $\underbrace{P(n) \text{ waar is}}_{\text{inductie-aanname}}$, dan is $P(n+1)$ waar

dan geldt $P(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ resp. alle $n \geqslant m$

$2\sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)$

$$1 = 1 = 1{\cdot}2{\cdot}3/6$$
$$1 + 4 = 5 = 2{\cdot}3{\cdot}5/6$$
$$1 + 4 + 9 = 14 = 3{\cdot}4{\cdot}7/6$$
$$1 + 4 + 9 + 16 = 30 = 4{\cdot}5{\cdot}9/6$$
$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55 = 5{\cdot}6{\cdot}11/6$$
$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91 = 6{\cdot}7{\cdot}13/6$$

$6\sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)$

$6\sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$

basis

$n = 0$ $6{\cdot}0^2 = 0(0+1)(0+1)$ ✓

inductiestap

inductie-aanname $6\sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)$ de formule voor n

te bewijzen $6\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = (n+1)(n+2)(2n+3)$

de formule klopt voor $n+1$

$6\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \boxed{6\sum_{i=0}^{n} i^2} + 6(n+1)^2 =$ (vul aanname in)

$\boxed{n(n+1)(2n+1)} + 6(n+1)^2 =$

$(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) = (n+1)(n+2)(2n+3)$ ✓

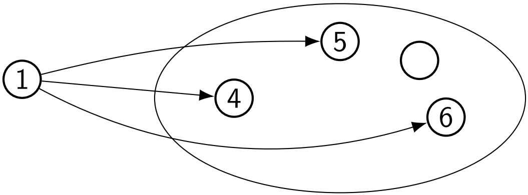
gerichte grafen

Thm. 9.2 G zonder cykels dan heeft G een put en een bron

Thm. 9.8

G zonder cykels dan bestaat er een topologische ordening

inductie op het aantal knopen n van de graaf



principe van volledige / natuurlijke inductie

$\mathbb{N}$ natuurlijke getallen

$P(n)$ eigenschap

1. *basis*
   bewijs $P(0)$
2. *inductiestap*
   bewijs, voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$
   als $\underbrace{P(k) \text{ waar is voor } k \leqslant n}_{\text{inductie-aanname}}$, dan is $P(n+1)$ waar

$t_0 = 5 \quad t_1 = 6$

$t_n = t_{n-1} + 6t_{n-2} - 12n + 8 \quad (n \geqslant 2)$

$3^n + (-2)^n + 2n + 3$ is een oplossing

basis

$n = 0 \quad 3^0 + (-2)^0 + 2{\cdot}0 + 3 = 1 + 1 + 0 + 3 = 5 = t_0 \quad \checkmark$

$n = 1 \quad 3^1 + (-2)^1 + 2{\cdot}1 + 3 = 3 - 2 + 2 + 3 = 6 = t_1 \quad \checkmark$

inductiestap

inductie-aanname $\quad t_k = 3^k + (-2)^k + 2k + 3 \quad$ voor $k \leqslant n$

de formule klopt tm. n

te bewijzen $\quad t_{n+1} = 3^{n+1} + (-2)^{n+1} + 2(n+1) + 3$

de formule klopt voor $n + 1$

bewering (aanname: oplossing klopt tot en met n)

$3^n + (-2)^n + 2n + 3$ oplossing voor $t_n = t_{n-1} + 6t_{n-2} - 12n + 8$

te bewijzen $t_{n+1} = 3^{n+1} + (-2)^{n+1} + 2(n+1) + 3$

definitie

$$t_{n+1} = \boxed{t_n} + 6\boxed{t_{n-1}} - 12(n+1) + 8$$

inductieaanname

$$= \boxed{3^n + (-2)^n + 2n + 3} + 6(\boxed{3^{n-1} + (-2)^{n-1} + 2(n-1) + 3}) - 12(n+1) + 8$$

$$= (1+2)3^n + (1-3)(-2)^n + (2+12-12)n + 3 - 12 + 18 - 12 + 8$$

$$= 3^{n+1} + (-2)^{n+1} + 2n + 5 \quad \checkmark$$

echt waar

inductieve definitie V

te bewijzen eigenschap $P(x)$ voor alle $x \in V$

1. *basis*
   bewijs $P(x)$ voor elke x in de basis
2. *inductiestap*
   bewijs dat $P(y)$ geldt voor y geconstrueerd met inductie-regel, onder de inductie-aanname dat $P(x)$ waar is voor alle x waaruit y geconstrueerd is (‘kleinere’ gevallen)

soms meerdere basisgevallen, meerdere inductiegevallen

1. *basis* $a, b \in L$
2. *inductie* $x, y \in L$ dan $cxy \in L$

a, b, caa, cab, ccabb, ccaacab, cccaacabccabb

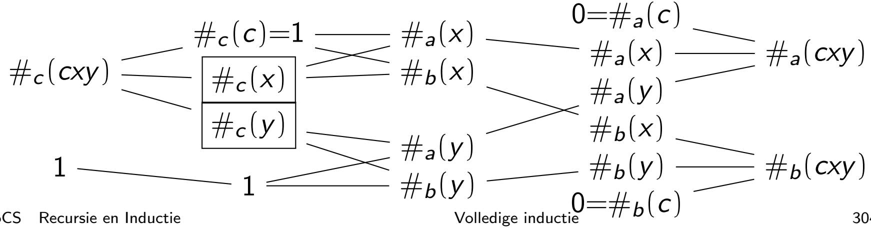
string x $\#_a(x)$ aantal letters a in x $\#_a(xy) = \#_a(x) + \#_a(y)$

(*) $\#_c(z) + 1 = \#_a(z) + \#_b(z)$ voor alle $z \in L$

basis klopt voor $z = a$ en $z = b$ bv. $\#_c(a) + 1 = \#_a(a) + \#_b(b) = 1$

inductiestap aanname (*) geldt voor $z = x$ en $z = y$

te bewijzen (*) geldt voor $z = cxy$

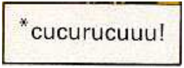


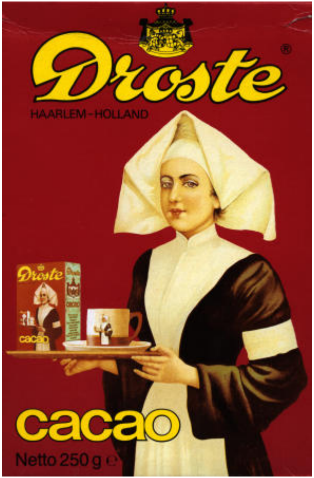
van klein naar groot

natuurlijke/volledige inductie   naar $n \in \mathbb{N}$

structurele inductie   naar de opbouw

klein   minder knopen, minder letters
vaak zonder expliciete n

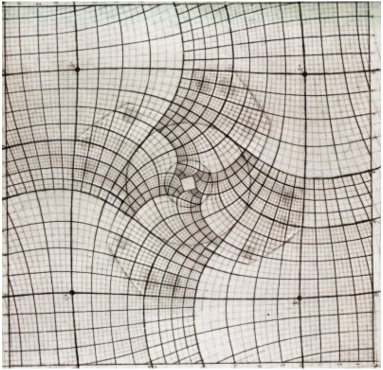

*cucurucuuu!



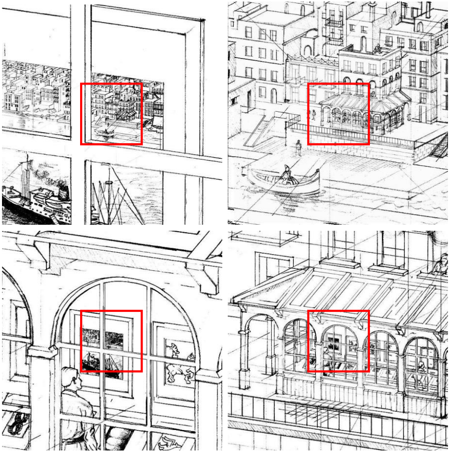
Droste effect

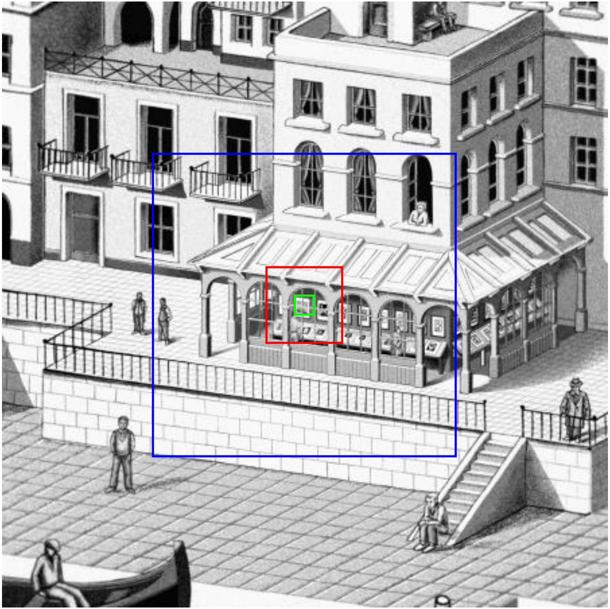
prentententoonstelling

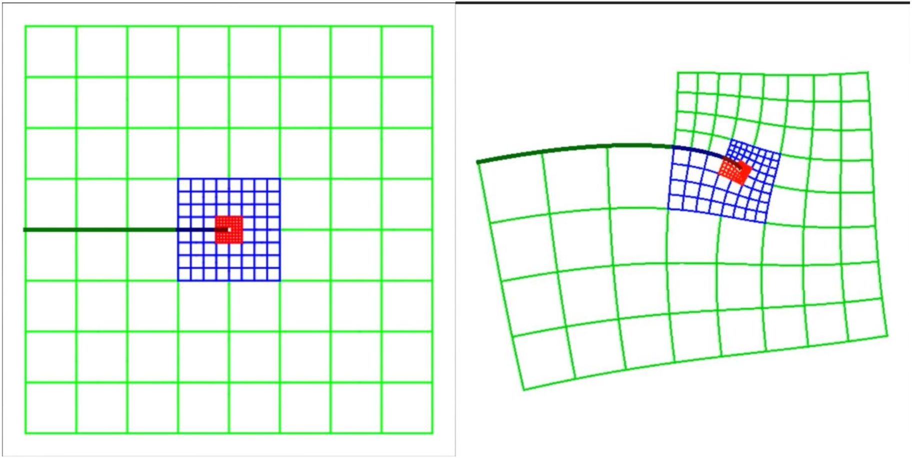
math.leidenuniv Escher and the Droste effect



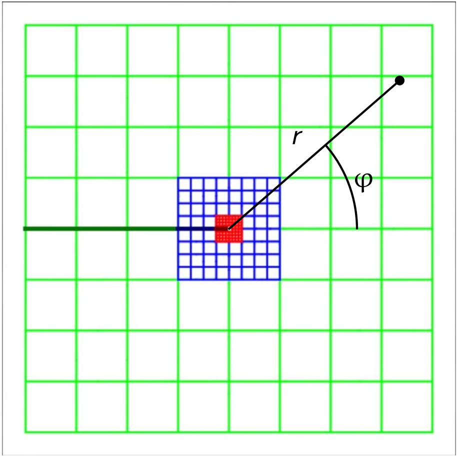
inzoomen

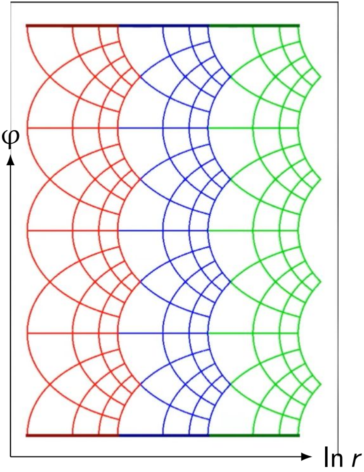






Youtube Oxford Mathematics, Jon Chapman





Youtube Oxford Mathematics, Jon Chapman
Hendrik Lenstra: Escher and the Droste effect

youtube EscherGranada

END.

edit 14 december 2020